ZUR
ANALYTISCHEN BEHANDLUNG
DER
SPHÄRISCHEN KEGELSCHNITTE.

INAUGURAL-DISSERTATION

ZUR

ERLANGUNG DER DOCTORWÜRDE

BEI

HOCHLÖBLICHER PHILOSOPHISCHER FACULTÄT
ZU MARBURG

EINGEREICHT

VON

HEINRICH IDE
AUS TRUSEN.
BEAUFTR. LEHRER AN DER HÖHEREN BÜRGERSCHULE ZU CASSEL.

MIT ZWEI FIGURENTAFELN.

MARBURG 1876.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41554015_0058

Einleitung.

§. 1. Sphärische Coordinatensysteme.

I. Axencoordinaten.

Als Axen werden zwei feste Hauptkreise der Kugel genommen, welche sich unter einem Winkel ν schneiden mögen; einer ihrer Durchschnittspunkte ist der Coordinatenanfang O. Der Aequator dieses Punktes soll die Cardinale und deren Durchschnittspunkte mit den Axen sollen die positiven, resp. negativen Cardinalpunkte $+X$, $+Y$ genannt werden, welche Punkte also von O um eine Bogenlänge von 90^0 entfernt sind. Um nun die Lage eines Punktes M zu bestimmen, lege man durch ihn und die Cardinalpunkte X und Y die Hauptkreise MX und MY; dieselben schneiden auf den festen Axen OX und OY die Bogenstücke $OP=x$ und $OQ=y$ ab. Bildet nun der Hauptkreis durch die Punkte O und M mit den Axen die Winkel $MOX=\alpha$ und $MOY=\beta$ und bezeichnet man die Bogenlänge OM mit z, so verhalten sich die Grössen tgx, tgy, tgz wie die Seiten eines ebenen Dreiecks mit den entsprechenden Winkeln β, α, $180^0-\nu$; so dass die Proportion gilt:

$$\frac{\sin\nu}{tgz}=\frac{\sin\beta}{tgx}=\frac{\sin\alpha}{tgy} \qquad (1)^*)$$

und für $\nu=\alpha+\beta=90^0$ die Gleichungen:

$$tgx=tgz\,.\cos\alpha,\quad tgy=tgz\,.\sin\alpha \qquad (2)$$

In Rücksicht auf die durch diese Gleichungen begründete grosse Einfachheit sollen nun die trigonometrischen Tangenten der auf den Axen abgeschnittenen Bogenstücke OP und OQ, also tgx und tgy die Coordinaten des Punktes M sein, die kurz mit x und y bezeichnet werden mögen. Ein Punkt (a, b) hat also die Coordinaten

$$x=tg\,a,\quad y=tg\,b. \qquad (3)$$

Ebenso soll der Radiusvector $z=tg(OM)$ sein und allgemein soll, zur Erleichterung der Ausdrucksweise und besonders, um die Aehnlichkeit der sphärischen Kegelschnitte mit den ebenen deutlicher hervortreten zu lassen, m nicht gleich sein der wirklichen Länge eines Bogens, sondern der trigonometrischen Tangente desselben.

Daraus folgen die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\sin\nu}{z}=\frac{\sin\beta}{x}=\frac{\sin\alpha}{y}\\ &z^2=x^2+y^2+2xy\cos\nu\\ \text{und für}\quad &\nu=90^0,\ z^2=x^2+y^2.\end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

II. Polarcoordinaten.

Die Bestimmung der Lage eines Punktes M durch Polarcoordinaten geschieht durch:

ϱ = der Tangente der sphärischen Entfernung des Punktes M von einem festen Punkte O, dem Pole,

und Θ = dem Winkel zwischen dem Hauptkreise OM und einem fetsen Hauptkreise OX.

*) Siehe Grundriss der analytischen Sphärik von Gudermann, Köln 1830. §. 4.

Um von Polarcoordinaten zu Axencoordinaten, oder umgekehrt von letzteren zu jenen überzugehen, hat man die Gleichungen (4) anzuwenden:

$$\left.\begin{aligned} \varrho = x\frac{\sin\nu}{\sin\beta} \quad &= y\frac{\sin\nu}{\sin\alpha} \\ x = \varrho\frac{\sin\beta}{\sin\nu},\ y &= \varrho\frac{\sin\alpha}{\sin\nu} \\ \text{und für } \nu = 90^0 \qquad x &= \varrho\cos\alpha,\quad y = \varrho\sin\alpha. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Sollte die Axe OX, oder der Anfangspunkt in beiden Systemen nicht dieselbe Lage haben, so sind weitere Transformationen nöthig, welche wir später kennen lernen.

§. 2. Gleichungsformen der sphärischen Graden. *)

Die Entfernung zweier Punkte (a, b) und (a', b') d. h. also, um es nochmals zu bemerken, die trigonometrische Tangente des die Punkte verbindenden kürzesten Bogens, ist:

$$\left.\begin{aligned} d &= \frac{\sqrt{\{(a'-a)^2 + 2(a'-a)(b'-b)\cos\nu + (b'-b)^2 + (ab'-a'b)^2\sin^2\nu\}}}{1 + aa' + bb' + (ab' + a'b)\cos\nu} \\ \text{und für } \nu = 90^0 \\ d &= \frac{\sqrt{\{(a'-a)^2 + (ab'-a'b)^2 + (b'-b)^2\}}}{1 + aa' + bb'}. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Für eine sphärische Entfernung von 90^0 wird $d = \infty$, folglich

$$1 + aa' + bb' + (ab' + a'b)\cos\nu = o;$$

setzt man hierin $a' = x$, $b' = y$ variabel, so stellt die Gleichung

$$\left.\begin{aligned} 1 + (a + b\cos\nu)x + (b + a\cos\nu)y &= o \\ \text{oder für } \nu = 90^0, \qquad 1 + ax + by &= o \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

einen Hauptkreis oder eine sphärische Grade vor mit dem sphärischen Mittelpunkt (a, b).

Für eine Grade, welche durch den Coordinatenanfang geht, findet man aus (4) die Gleichung:

$$y = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}x = \mu x \tag{8}$$

Schneidet die Grade von den Axen die Stücke m und n ab, so ist ihre Gleichung:

$$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1. \tag{9}$$

Die allgemeine Gleichung der Graden ist also:

$$ax + by + c = o \tag{10}$$

welche das sphärische Centrum (p, q):

$$p = \frac{a - b\cos\nu}{c\sin^2\nu}, \quad q = \frac{b - a\cos\nu}{c\sin^2\nu} \text{ hat.}$$

Die Grade $a'x + b'y + c' = o$ hat mit der vorigen die Durchschnittspunkte:

$$\xi = \frac{b'c - bc'}{a'b - ab'}, \quad \eta = \frac{ac' - a'c}{a'b - ab'}; \tag{11}$$

für $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$ wird $\xi = \eta = \infty$, woraus folgt: dass solche Grade, deren Gleichungen dieselbe Richtungsconstante haben, sich in der Cardinale schneiden. Wir wollen dieselben „sphärisch parallel" nennen; dabei ist jedoch zu bemerken, dass solche Grade nur so lange parallel bleiben, als der Coordinatenanfang im Aequator ihres Durchschnittspunktes (ξ, η) bleibt.

*) Der §. 2 ist ein kurzer Auszug aus dem schon genannten Werke von Gudermann von §. 5 bis §. 14.

Die Graden $a\,x + b\,y + c = o$ und $a'\,x + b'\,y + c' = o$ bilden einen Winkel v, dessen Cosinus ist:

$$\cos v = \frac{a\,a' + b\,b' + c\,c'}{\sqrt{\{(a^2 + b^2 + c^2)\,(a'^2 + b'^2 + c'^2)\}}}, \quad v = 90^0. \tag{12}$$

Daher hat man als Bedingung des Senkrechtstehens der beiden Graden:

$$a\,a' + b\,b' + c\,c' = o. \tag{13}$$

Eine Grade, welche durch die Punkte (t, u) und (t', u') geht, hat die Gleichung:

$$(u' - u)\,x - (t' - t)\,y = u'\,t - u\,t'. \tag{14}$$

Eine Grade, welche durch den Punkt (m, n) geht und auf $a\,x + b\,y + c = o$ senkrecht steht, hat die Gleichung:

$$y - n = \frac{b - n\,c}{a - m\,c}\,(x - m), \quad v = 90^0. \tag{15}$$

Die Coordinaten des Fusspunktes sind:

$$m' = m - \frac{(am + bn + c)\,(a - mc)}{a^2 + b^2 - (ma + nb)\,c}, \quad n' = n - \frac{(am + bn + c)\,(b - nc)}{a^2 + b^2 - (ma + nb)\,c} \tag{16}$$

und die Grösse der Senkrechten ist:

$$p = \frac{am + bn + c}{\sqrt{\{1 + m^2 + n^2)\,(a^2 + b^2 + c^2) - (am + bn + c)^2\}}}. \tag{17}$$

§. 3. Transformation der Coordinaten.

Die Coordinatentransformation auf der Kugel bietet im Gegensatz zu der Ebene ganz bedeutende Schwierigkeiten, sobald die Lage des Anfangspunktes sich ändert. In diesem Falle bekommen nämlich Cardinale und Cardinalpunkte eine andere Lage und die Hauptkreise durch die Cardinalpunkte und den Punkt M werden selbst bei paralleler Verschiebung andere, während sie in der Ebene wegen der unendlichen Entfernung der Cardinalpunkte mit denen des parallelen Systems zusammenfallen. Es werden deshalb nur diejenigen Transformationsformeln angeführt, von welchen in der folgenden Abhandlung Gebrauch gemacht wird.

1) Drehung der Axen mit Beibehaltung des Anfangspunktes.

Rechtwinklige Systeme.

Wird das Coordinatensystem gedreht, so dass die neuen Axen $O\,Y^1$ und $O\,X^1$ mit den ursprünglichen den Winkel Θ bilden, so bestehen nach (4) die Gleichungen:

$$\begin{aligned} y &= z\cos\beta & x &= z\cos\alpha \\ y_1 &= z\cos(\beta + \Theta) & x_1 &= z\cos(\alpha - \Theta) \end{aligned} \tag{18}$$

und indem man die oberen Gleichungen in die unteren substituirt:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= y\cos\Theta - x\sin\Theta & x_1 &= x\cos\Theta + y\sin\Theta \\ y &= x_1\sin\Theta + y_1\cos\Theta, & x &= x_1\cos\Theta - y_1\sin\Theta \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

und durch Umkehrung:

2) Uebergang zu schiefwinkligen Axen.

Um von einem rechtwinkligen System zu einem schiefwinkligen überzugehen, das Anfang und Xaxe mit dem vorigen gemein hat, und dessen Yaxe mit der vorigen den Winkel Θ bildet, findet man folgende Gleichungen:

Wie leicht aus Fig. 3 zu sehen, ist: $y_1\cos\Theta = y$,
ferner sei der Hülfskreis $O\,P$ senkrecht zu $O\,Y^1$; dann ist: $x_1\cos\Theta = p$ $\Big\}$ (20α)
und nach (19) $p = x\cos\Theta + y\sin\Theta$. Daher erhält man durch Umkehrung die Formeln:

$$x = x_1 - y_1\sin\Theta, \quad y = y_1\cos\Theta \tag{20β}$$

3) Das rechtwinklige System soll nach einem neuen Anfangspunkt O^1, dessen Coordinaten a und b sind, verschoben werden. (Fig. 4.)

Man verschiebe den Anfang zunächst zum Punkte (a, o) in der Xaxe, so dass die neuen Axen $a\,Y$ und $a\,X^1$ und die Coordinaten des Punktes M für diese Axen $a\,x_, = x$, und $a\,y_, = y$, sind.

Es ist nun in dem rechtwinkligen sphärischen Dreieck $Y\,y\,M$:

$$tg\,\widehat{y\,Y} = tg\,\widehat{YM}\,.\,cos\,\widehat{Ox} \quad \text{oder nach gewohnter Schreibeweise} \quad \frac{1}{y} = m\,\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}; \tag{21}$$

ebenso ist in dem Dreieck $Y\,y_1\,M$: $$\frac{1}{y_,} = m\,\frac{1}{\sqrt{1+x_1{}^2}}. \tag{22}$$

Durch Division der beiden Gleichungen erhält man: $$y = y_,\frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x_1{}^2}}. \tag{23}$$

Da aber $\widehat{Ox} = \widehat{Oa} + \widehat{ax_,}$ ist, so ist: $$x = \frac{a + x_,}{1 - a\,x_,}, \tag{24}$$

durch welche Substitution (23) wird

$$y = y_,\,\frac{\sqrt{1+\left(\frac{a+x_,}{1-a\,x_,}\right)^2}}{\sqrt{1+x_,^2}} = y_,\,\frac{\sqrt{1+a^2}}{1-a\,x_,}. \tag{25}$$

Verfährt man nun in diesem System $Ya\,X^1$ wie vorher, indem man den Anfang nach dem in der neuen Yaxe liegenden Punkte O^1 verschiebt, so dass man als Axen $O^1\,X^1$ und $O^1\,Y^1$ und als Coordinaten des Punktes M: $O^1\,x_{,,} = x_{,,}$, $O^1\,y_, = y_{,,}$ erhält, so ist für $tg\,\widehat{a\,O^1} = \beta$:

$$x_, = \frac{x_{,,}\sqrt{1+\beta^2}}{1-\beta\,y_{,,}}, \quad y_, = \frac{\beta + y_{,,}}{1-\beta\,y_{,,}}. \tag{26}$$

Es ist aber in dem rechtwinkligen Dreieck $O\,O^1\,a$:

$$z^2 = a^2 + \beta^2 + a^2\,\beta^2 = a^2 + b^2$$

woraus folgt:

$$\beta = \frac{b}{\sqrt{1+a^2}} \tag{27}$$

Diesen Werth (27) in (26) substituirt:

$$x_, = \frac{x_{,,}\sqrt{1+a^2+b^2}}{\sqrt{1+a^2} - b\,y_{,,}}, \quad y_, = \frac{b + y_{,,}\sqrt{1+a^2}}{\sqrt{1+a^2} - b\,y_{,,}} \tag{28}$$

Substituirt man endlich (28) in (23) und (24), so erhält man die Transformationsformeln:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{a\sqrt{1+a^2} - a\,b\,y_, + x_,\sqrt{1+a^2+b^2}}{\sqrt{1+a^2} - b\,y_, - a\,x_,\sqrt{1+a^2+b^2}} \\ y &= \frac{b\sqrt{1+a^2} + (1+a^2)\,y_,}{\sqrt{1+a^2} - b\,y_, - a\,x_,\sqrt{1+a^2+b^2}} \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

worin $x_,$ für $x_{,,}$ und $y_,$ für $y_{,,}$ gesetzt wurde.

Das neue System ist ebenfalls ein rechtwinkliges.

Die neue Yaxe schneidet die ursprüngliche in einer Bogenentfernung von 90^0 von O aus gerechnet und die Xaxen schneiden sich in einer Entfernung $90^0 + arctg\ a$*)

4) Transformation nach einem Punkt der Cardinale.

Zu einer Transformation nach einem Anfangspunkte, der um 90^0 von dem ursprünglichen entfernt ist, genügt die Formel (29) nicht, da in diesem Falle $a = b = \infty$ wird. Es wird hierfür die von Gudermann §. 19 aufgestellte Transformationsformel benutzt:

$$x \sin \nu = \frac{\begin{array}{r}\sin e \sin n + \{\sin n \cos m' \cos e + \cos n \sin m'\}\, x, \\ + \{\sin n \cos n' \cos e - \cos n \sin n'\}\, y,\end{array}}{\cos e - x, \sin e \cos m' - y, \sin e \cos n'}$$

$$y \sin \nu = \frac{\begin{array}{r}\sin e \sin m + \{\sin m \cos n' \cos e + \cos m \sin n'\}\, y, \\ + \{\sin m \cos m' \cos e - \cos m \sin m'\}\, x,\end{array}}{\cos e - y, \sin e \cos n' - x' \sin e \cos m'}$$

worin e die sphärische Entfernung der Anfangspunkte, m und n die Winkel der Verbindungslinie der Anfangspunkte mit den alten Axen, m' und n' die gleichbedeutenden Winkel mit den neuen Axen sind.

Es soll nun $m = m' = \alpha$, $n = n' = 90^0 - \alpha$, $\nu = 90^0$ sein, alsdann erhält man unter Berücksichtigung, dass $\sin e = 1$, $\cos e = o$ ist, die einfachen Transformationsformeln auf den Durchschnittspunkt der Graden $y = tg\ \alpha \,.\, x$ und der Cardinale als Anfangspunkt bezogen

$$x = \frac{\cos \alpha - y, \sin \alpha \cos \alpha + x, \sin^2 \alpha}{- y, \sin \alpha - x, \cos \alpha} \qquad y = \frac{\sin \alpha - x, \sin \alpha \cos \alpha - y, \cos^2 \alpha}{- y, \sin \alpha - x, \cos \alpha} \tag{30}$$

Die Haupteigenschaften des sphärischen Kegelschnittes, hergeleitet aus der allgemeinen Gleichung zweiten Grades.

§. 4. Die Natur des Kegelschnitts ist abhängig von den Werthverhältnissen der Constanten der allgemeinen Gleichung zweiten Grades.

Die allgemeine Gleichung lautet:

$$a_{11} x^2 + 2 a_{12} x y + a_{22} y^2 + 2 a_{13} x + 2 a_{23} y + a_{33} = o \tag{1}$$

oder als Polargleichung:

$$(a_{11} \cos^2 \Theta + 2 a_{12} \cos \Theta \sin \Theta + a_{22} \sin^2 \Theta)\, \varrho^2 + 2 (a_{13} \cos \Theta + a_{23} \sin \Theta)\, \varrho + a_{33} = o \tag{2}$$

worin ϱ den Radiusvector darstellt.

Aus dieser Gleichung, als einer Gleichung zweiten Grades, folgt:

1) Der Radiusvector und überhaupt, da der Coordinatenanfang beliebig angenommen ist, eine Grade schneidet die Curve in höchstens zwei Punkten; wobei natürlich die Gegenpunkte derselben nicht beachtet werden, da sie ausserhalb des von der Cardinale begrenzten Coordinatenfeldes liegen.

2) Für $a_{33} = o$ ist ein Werth von ϱ gleich Null, d. h. der Coordinatenanfang liegt auf der Curve selbst.

---

*) Carl Dietrich hat in seiner „Analytischen Geometrie auf der Kugel" ähnliche Formeln aufgestellt. Es kam mir jedoch diese Abhandlung erst nach Vollendung der vorliegenden Arbeit in die Hände und ist sie ohne den geringsten Einfluss auf dieselbe geblieben.

3) Die Gleichung:

$$a_{11}\cos^2\Theta + 2a_{12}\cos\Theta\sin\Theta + a_{22}\sin^2\Theta = o \qquad (3)$$

liefert zwei Werthe von Θ, für welche die Gleichung (2) eine Wurzel $\varrho = \infty$ hat; d. h. für diesen Werth Θ schneiden sich Radiusvector und Curve in der Cardinale. Man hat hierbei drei Fälle zu unterscheiden:

a) Die Wurzeln der Gleichung (3) sind imaginär für $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < o$; die Curve liegt in diesem Fall vollständig innerhalb der Cardinale, sie liefert das Bild einer Ellipse. (Fig. 5.)

b) Die Gleichung (3) hat zwei reelle Wurzeln für $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > o$; in diesem Falle werden Curve und Gegencurve von der Cardinale geschnitten und ergeben das Bild einer Hyperbel. (Fig. 6.)

c) Die Gleichung (3) hat zwei gleiche Wurzeln für $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = o$. Die Cardinale ist Tangente der Curve, welche unter später zu erörternden Bedingungen zahlreiche Eigenschaften mit der ebenen Parabel gemein hat. (Fig. 7.)

Man ersieht daraus, dass der sphärische Kegelschnitt je nach der Wahl des Coordinatenanfangs als Ellipse, Hyperbel, in speciellen Fällen auch als Parabel betrachtet werden kann. Im Folgenden soll dargethan werden, dass er in der That viele Eigenschaften der genannten Curven in sich vereinigt.

§. 5. Centra, Durchmesser, Tangenten und Polaren des Kegelschnitts.

Die Gleichung $a_{13}\cos\Theta + a_{23}\sin\Theta = o \qquad (1)$

liefert einen Werth Θ, für welchen die Gleichung (2) des vorigen Paragraphen zwei gleiche, aber entgegen gesetzte Wurzeln hat, also $\varrho = -\varrho$, wird. Für diesen Werth Θ wird also der Radiusvector im Coordinatenanfang halbirt. Ist nun $a_{13} = o$, $a_{23} = o$, so wird der Radiusvector für jedes Θ in O halbirt, d. h. der Coordinatenanfang ist zugleich Centrum der Curve.

Transformirt man die allgemeine Gleichung auf einen Punkt (a, b) als Anfang mittelst der Formeln (29) in A, indem man rechtwinklige Coordinatensysteme annimmt, und ordnet die neue Gleichung nach fallenden Potenzen von x_r und y_r, so erhält man als Coefficienten der ersten Potenzen

$$\left.\begin{aligned} a_{13}' &= \sqrt{1+a^2}\sqrt{1+a^2+b^2}\,\{(a_{11}a + a_{12}b + a_{13}) - a(a_{13}a + a_{23}b + a_{33})\} \\ a_{23}' &= \sqrt{1+a^2}\{-ab(a_{11}a + a_{12}b + a_{13}) + (1+a^2)(a_{12}a + a_{22}b + a_{23}) - b(a_{13}a + a_{23}b + a_{33})\} \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Soll nun (a, b) zugleich Centrum der Curve sein, so muss $a_{13}' = a_{23}' = o$, oder führt man in (2) die Abkürzungen:

$a_{11}a + a_{12}b + a_{13} = \alpha$, $a_{13}a + a_{23}b + a_{33} = \beta$, $a_{12}a + a_{22}b + a_{23} = \gamma$ ein, so muss

$$\left.\begin{aligned} a_{13}' &= \sqrt{1+a^2}\sqrt{1+a^2+b^2}\,\{\alpha - a\beta\} = o \\ a_{23}' &= \sqrt{1+a^2}\{-ab\alpha + (1+a^2)\gamma - b\beta\} = o \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

oder: $\alpha - a\beta = o$, $(1+a^2)\gamma - ab\alpha - b\beta = o$ sein.

Aus diesen Gleichungen folgt aber:

$$a = \frac{\alpha}{\beta}, \quad b = \frac{\gamma}{\beta}$$

oder für α, β, γ ihre Werthe eingesetzt:

$$a = \frac{a_{11}a + a_{12}b + a_{13}}{a_{13}a + a_{23}b + a_{33}}, \quad b = \frac{a_{12}a + a_{22}b + a_{23}}{a_{13}a + a_{23}b + a_{33}}. \qquad (4)$$

Eliminirt man aus diesen Gleichungen eine der Unbekannten a oder b, so erhält man für die andere eine cubische Gleichung, woraus folgt, dass der sphärische Kegelschnitt drei Mittelpunkte besitzt. Durch Bestimmung der Wurzeln dieser cubischen Gleichung über die Realität der drei Mittelpunkte zu entscheiden, würde sehr umständlich sein; es soll dies auf andere Weise versucht werden.

Die Gleichung der Tangente an einen Kegelschnitt erhält man auf ganz gleiche Weise wie in der Ebene, wie sie z. B. bei Salmon, analytische Geometrie der Kegelschnitte, 3. Auflage, pag. 134, entwickelt ist, indem man die beiden Durchschnittspunkte einer Graden mit der Curve zusammenfallen lässt. Die Gleichung lautet:

$$a_{11}\, x, x + a_{12}\,(x, y + x\, y,) + a_{22}\, y, y + a_{13}\,(x, + x) + a_{23}\,(y, + y) + a_{33} = o \qquad (5)$$

Hat die Polare eines sphärischen Kegelschnittes dieselbe Bedeutung wie die Polare eines ebenen — mit Berücksichtigung, dass jene ein durch die Berührungspunkte gehender Hauptkreis, also eine sphärische Grade ist — so stellt die Gleichung (5) auch die Polare eines ausserhalb der Curve liegenden Punktes $(x, y,)$ dar; wir wollen derselben die folgende Gestalt geben:

$$(a_{11}\, x, + a_{12}\, y, + a_{13})\, x + (a_{12}\, x, + a_{22}\, y, + a_{23})\, y + (a_{13}\, x, + a_{23}\, y, + a_{33}) = o \qquad (6)$$

Soll der Punkt $(x,, y,)$ zugleich sphärischer Mittelpunkt seiner Polaren sein, so besteht nach §. 2 (10) die Bedingung:

$$x, = \frac{a_{11}\, x, + a_{12}\, y, + a_{13}}{a_{13}\, x, + a_{23}\, y, + a_{33}}, \quad y, = \frac{a_{12}\, x, + a_{22}\, y, + a_{23}}{a_{13}\, x, + a_{23}\, y, + a_{33}}, \qquad (7)$$

welche Gleichungen mit Rücksicht auf (4) aussagen, dass die Centra des Kegelschnitts zugleich sphärische Mittelpunkte ihrer Polaren sind. Die Tangenten von ihnen an den Kegelschnitt schneiden daher die Polare rechtwinklig und sind beide gleich 90^0. Aus der symmetrischen Gestalt der Gleichung für die Polare folgt ausserdem, dass, wenn ein Punkt $(x,, y,)$ in der Polaren von (a, b) liegt, auch (a, b) in der Polaren von $(x,, y,)$ liegen muss. Daher liegen die Pole aller durch ein Centrum gehenden Polaren, d. h. aller Durchmesser, in der Polaren dieses Centrums und die Tangenten von einem Punkte der Centrumspolaren berühren die Curve in den Endpunkten eines Durchmessers.

Wie aus Fig. 8 leicht ersichtlich, ist das Dreieck

$O\,CN \cong O^1\,CM$ und $O\,CM \cong O^1\,CN$, also

$$ON = O^1M, \qquad OM = O^1N \text{ und } ON + OM = O^1N + O^1M = 180^0 \qquad (8)$$

Die Tangenten von einem Punkte der Centrumspolaren, die also ein grösster Kreis um das Centrum als sphärischer Mittelpunkt ist, ergänzen sich zu 180^0. Nähert sich der Pol der Curve, so entfernt sich die Polare vom Mittelpunkt, die Summe der Tangenten wird $< 180^0$, bis sie bei dem Zusammenfallen der Polare mit dem Pol, auf der Curve selbst, gleich Null wird. Die Polare ist also nur dann ein Durchmesser, wenn die Tangentensumme gleich 180^0 ist. Daraus und aus dem oben gesagten folgt aber, dass die Polare eines Centrums zugleich Durchmesser der Curve ist, dass die Centra als Durchschnittspunkte von je zwei ihrer Polaren um je 90^0 von einander entfernt sind und die Polaren, sich rechtwinklig schneidend, die Ecken und Seiten eines Octanten bilden.

Die Richtigkeit dieses Schlusses wird durch Folgendes bestätigt:

Die aus den Gleichungen (4) oder (7) resultirende Gleichung dritten Grades hat mindestens eine reelle Wurzel. Denkt man sich die allgemeine Gleichung nach diesem Punkte transformirt, so erhält man als allgemeine Centralgleichung des Kegelschnitts:

$$Ax^2 + 2\,Bxy + Cy^2 + D = o \qquad (9)$$

Transformirt man nun auf einen beliebigen Punkt der Cardinale, in welcher nach dem vorigen die beiden anderen Centra, falls sie reell sind, liegen müssen, mittelst der Formeln (30) §. 3

$$x = \frac{\cos\alpha - y, \sin\alpha\cos\alpha + x, \sin^2\alpha}{-\, y, \sin\alpha - x, \cos\alpha}$$

$$y = \frac{\sin\alpha - x, \sin\alpha\cos\alpha + y, \cos^2\alpha}{-\, y, \sin\alpha - x, \cos\alpha}$$

so erhält man die Gleichung:

$$A^1\, x,^2 + 2\,B^1\, x, y, + C^1\, y,^2 + 2\, x, \{(A - C)\sin\alpha\cos\alpha - B\,(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)\}\sin\alpha$$
$$- 2\, y, \{(A - C)\sin\alpha\cos\alpha - B\,(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)\}\cos\alpha + D^1 = o \qquad (10)$$

Soll nun der neue Anfangspunkt Centrum des Kegelschnitts sein, so muss:

$$(A - C)\, tg\, \alpha - B\,(1 - tg^2\, \alpha) = o$$

oder

$$tg\, \alpha = \frac{-(A-C) \pm \sqrt{(A-C)^2 + 4B^2}}{2B} \quad \text{sein.} \tag{11}$$

Der Ausdruck unter der Wurzel ist stets positiv; folglich liegen in der That in der Cardinale des einen Centrums zwei andere reelle Centra des Kegelschnitts. Die Radiivectoren nach diesen beiden Punkten bilden mit der Xaxe die durch Gleichung (11) bestimmte Winkel α_1 und α_2. Ihre Differenz giebt den Winkel, den sie mit einander bilden μ und es ist:

$$tg\, \mu = \frac{tg\, \alpha_1 - tg\, \alpha_2}{1 + tg\, \alpha_1\, tg\, \alpha_2} = \frac{2\sqrt{(A-C)^2 + 4B^2}}{1 + \frac{-4B^2}{4B^2}} = \infty \tag{12}$$

folglich ist $\mu = 90^0$ und die drei Centra sind wirklich die Ecken eines Octanten. Die Seiten dieses Octanten, welche durch hervorragende Eigenschaften ausgezeichnet sind, sollen die Hauptaxen des Kegelschnitts heissen.

Die auf irgend zwei Durchmesser als Axen bezogene Gleichung des Kegelschnitts wird nun allgemein:

$$a_{11}\, x^2 + 2\, a_{12}\, xy + a_{22}\, y^2 + a_{33} = o \tag{13}$$

Ein zu demselben Centrum O gehöriger Durchmesser habe die Gleichung: $y = \alpha x$. (14)

Nun ist die Gleichung der Polaren eines Punktes der Cardinalen, den wir unbeachtet der Unendlichkeit seiner Coordinaten mit (a, b) bezeichnen wollen:

$$y = -\frac{a_{11}\, a + a_{12}\, b}{a_{12}\, a + a_{22}\, b}\, x \tag{15}$$

Man erhält deshalb für den Pol des Durchmessers $MN (y = \alpha x)$ (Fig. 9) die Gleichung:

$$\alpha = -\frac{a_{11}\, a + a_{12}\, b}{a_{12}\, a + a_{22}\, b} \quad \text{oder} \quad \frac{b}{a} = -\frac{a_{12}\, \alpha + a_{11}}{a_{22}\, \alpha + a_{12}} \tag{16}$$

Der durch (a, b) gehende Durchmesser $M^1\, N^1$ hat daher die Gleichung:

$$y = -\frac{a_{12}\, \alpha + a_{11}}{a_{22}\, \alpha + a_{12}}\, x \tag{17}$$

Soll derselbe die Polare eines Punktes (a', b') der Cardinale sein, so besteht analog der Gleichung (16) die Bedingung:

$$\frac{a_{12}\, b' + a_{11}\, a'}{a_{22}\, b' + a_{12}\, a'} = \frac{a_{12}\, \alpha + a_{11}}{a_{22}\, \alpha + a_{12}}, \tag{18}$$

welche durch Auflösung nach $\frac{b'}{a'}$ ergiebt:

$$\frac{b'}{a'} = \alpha \tag{19}$$

Der durch (a', b') gehende Durchmesser ist also $y = \alpha x$, nämlich MN.

Solche Durchmesser, wie $M\ N$ und $M^1\ N^1$, von denen der eine immer Polare des Durchschnittspunktes des andern mit der Cardinale ist, heissen conjugirte Durchmesser. Ihre Gleichungen sind:

$$\left.\begin{aligned} &\text{I.}\quad y = \alpha x \\ &\text{II.}\quad y = -\frac{a_{12}\, \alpha + a_{11}}{a_{22}\, \alpha + a_{12}}\, x \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Um die Curvengleichung auf diese Durchmesser zu transformiren, verfahre man wie folgt: Man drehe das System bis zum Zusammenfallen der Xaxe mit dem einen Durchmesser; darauf verlege man die Yaxe in den andern. Durch Vereinigung der Formeln (19) und (20) §. 3 erhält man die Transformationsformeln:

$$\left.\begin{aligned} x &= x_, \cos\Theta - y_, \sin(\Theta + \Theta_,) \\ y &= x_, \sin\Theta + y_, \cos(\Theta + \Theta_,), \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

wobei Θ der Winkel zwischen dem Durchmesser I und der Xaxe, $\Theta_,$ gleich dem Winkel zwischen den beiden Durchmessern $-\frac{\pi}{2}$ sein soll; also:

$$\left.\begin{aligned} &\Theta = artg\,\alpha, \quad \Theta_, = \mu - \frac{\pi}{2}, \quad \sin\Theta = \frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}, \quad \cos\Theta = \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}, \\ &\cos\mu = \frac{\alpha - \dfrac{a_{22}\,\alpha + a_{12}}{a_{12}\,\alpha + a_{11}}}{\sqrt{\left\{(1+\alpha^2)\left[1+\left(\dfrac{a_{22}\,\alpha + a_{12}}{a_{12}\,\alpha + a_{11}}\right)^2\right]\right\}}}, \\ &\sin\mu = \frac{1 + \alpha\dfrac{a_{22}\,\alpha + a_{12}}{a_{12}\,\alpha + a_{11}}}{\sqrt{\left\{(1+\alpha^2)\left[1+\left(\dfrac{a_{22}\,\alpha + a_{12}}{a_{12}\,\alpha + a_{11}}\right)^2\right]\right\}}}. \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Diese Werthe (22) in (21) eingesetzt ergeben die Transformationsformeln:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{x_,}{\sqrt{1+\alpha^2}} - \frac{y_,(a_{12} + a_{22}\,\alpha)}{\sqrt{(a_{12} + a_{22}\,\alpha)^2 + (a_{11} + a_{12}\,\alpha)^2}} \\ y &= \frac{\alpha\, x_,}{\sqrt{1+\alpha^2}} + \frac{y_,(a_{11} + a_{12}\,\alpha)}{\sqrt{(a_{12} + a_{22}\,\alpha)^2 + (a_{11} + a_{12}\,\alpha)^2}} \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

und die Gleichung (13) wird durch diese Transformation:

$$x_,^2\left\{\frac{a_{11} + 2\,a_{12}\,\alpha + a_{22}\,\alpha^2}{1+\alpha^2}\right\} + y_,^2\left\{\frac{a_{11} - 2\,a_{12}\dfrac{a_{11} + a_{12}\,\alpha}{a_{12} + a_{22}\,\alpha} + a_{22}\left(\dfrac{a_{11} + a_{12}\,\alpha}{a_{12} + a_{22}\,\alpha}\right)^2}{1 + \left(\dfrac{a_{11} + a_{12}\,\alpha}{a_{12} + a_{22}\,\alpha}\right)^2}\right\} + a_{33} = o. \tag{24}$$

Es ist aber die Länge eines Halbmessers $y = \mu\, x$ (d. h. die Tangente seiner Bogenlänge)

$$= \sqrt{\frac{-\,a_{33}\,(1+\mu^2)}{a_{11} + 2\,a_{12}\,\mu + a_{22}\,\mu^2}}. \tag{25}$$

Dividirt man daher die Gleichung (24) durch $-\,a_{33}$, so stellen die Coefficienten und $x_,^2$ und $y_,^2$ die Quadrate der reciproken Längen der conjugirten Halbmesser vor, auf welche die Gleichung (13) transformirt wurde. Bezeichnet man dieselben mit m und n, so erhält man die einfache Centralgleichung:

$$\frac{x^2}{m^2} + \frac{y^2}{n^2} = 1. \tag{26}$$

Sollen die conjugirten Durchmesser:

$$y = \alpha\, x, \quad y = -\,\frac{a_{11} + a_{12}\,\alpha}{a_{12} + a_{22}\,\alpha}\, x$$

auf einander senkrecht stehen, so muss in (22) $\cos\mu = o$ sein, oder:

$$a_{12}\,\alpha^2 + (a_{11} - a_{12})\,\alpha - a_{12} = o. \tag{27}$$

Diese Gleichung hat immer reelle Wurzeln:

$$\alpha = tg\,\Theta = \frac{-\,(a_{11} - a_{22}) \pm \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4\,a_{12}^2}}{2\,a_{12}}. \tag{28}$$

Bezeichnet man die beiden Wurzeln mit $tg\,\Theta_1$ und $tg\,\Theta_2$, so findet man

$$tg\,(\Theta_1 - \Theta_2) = \infty, \text{ also } \Theta_1 - \Theta_2 = 90^0.$$

Daher decken sich die beiden Paare rechtwinklig conjugirter Durchmesser, auf die man aus (27) schliessen konnte, und jeder sphärische Kegelschnitt hat nur ein Paar rechtwinklig conjugirter Durchmesser. Ausserdem stimmt (28) genau mit (11) überein, woraus folgt, dass die rechtwinklig conjugirten Durchmesser die beiden andern Centra als Cardinalpunkte enthalten, was man auch daraus schliessen konnte, dass für diesen Fall die in Fig. 9 mit (a, b) und (a', b') bezeichneten Punkte sphärische Mittelpunkte ihrer Polaren sind. Zugleich ist ersichtlich, dass diese Durchmesser Hauptaxen des Kegelschnitts sind, während die Cardinale des zum Coordinatenanfang gewählten Mittelpunktes die dritte Hauptaxe ist.

Das Vorzeichen der Coefficienten in (24) hängt lediglich von ihren Zählern ab. Durch einfache Umformung findet man den Zähler des Coefficienten von $y_1^2 =$

$$(a_{11}\, a_{22} - a_{12}^2)\, \{a_{11} + 2a_{12}\, \alpha + a_{22}\, \alpha^2\} \tag{29}$$

Es ist aber $a_{11}\, a_{22} - a_{12}^2 \lesseqgtr o$, jenachdem die allgemeine Gleichung eine Ellipse oder Hyperbel vorstellt, und es ist daher:

$$\frac{x^2}{m^2} \pm \frac{y^2}{n^2} = 1 \tag{30}$$

eine Ellipse oder Hyperbel, jenachdem das obere oder untere Vorzeichen steht; für $x = o$ ist $y^2 = \pm n^2$, woraus folgt, dass bei der Ellipse sämmtliche Durchmesser reell sind, bei der Hyperbel dagegen der eine von je zwei conjugirten Durchmessern imaginär.

§. 6. Harmonische Theilung des Radiusvectors durch Polare und Curve.

Die harmonische Proportion:

$$\sin AB \,.\, \sin CD = \sin BC \,.\, \sin AD^*)$$

kann man auch schreiben:

$$\frac{\sin AB \sin(AD - AC)}{\cos AB \cos AD \cos AC} = \frac{\sin AD \sin(AC - AB)}{\cos AD \cos AC \cos AB}$$

oder

$$tg\, AB \,\{ tg\, AD - tg\, AC \} = tg\, AD \,\{ tg\, AC - tg\, AB \} \tag{1}$$

oder indem man die Bezeichnung $\varrho_1\ \varrho_0\ \varrho_2$ einführt:

$$\varrho_1 (\varrho_2 - \varrho_0) = \varrho_2 (\varrho_0 - \varrho_1)$$

$$\varrho_0 = \frac{2\, \varrho_1\, \varrho_2}{\varrho_1 + \varrho_2} \tag{2}$$

Auf einen beliebigen Anfang P und rectwinklige Coordinaten bezogen ist die allgemeine Curvengleichung:

$$a_{11}\, x^2 + 2\, a_{12}\, x\, y + a_{22}\, y^2 + 2\, a_{13}\, x + 2\, a_{23}\, y + a_{33} = o.$$

Ein beliebiger unter einem Winkel Θ geneigter Radiusvector wird von der Curve geschnitten in Punkten, welche um ϱ_1 und ϱ_2 von P entfernt sind. Soll nun in einer Entfernung ϱ_0 ein vierter harmonischer Theilungspunkt sein, so muss

$$\varrho_0 = \frac{2\, \varrho_1\, \varrho_2}{\varrho_1 + \varrho_2} \qquad \text{sein.}$$

ϱ_1 und ϱ_2 sind aber Wurzeln der Gleichung:

$$(a_{11} \cos^2 \Theta + 2\, a_{12} \cos \Theta \sin \Theta + a_{22} \sin^2 \Theta)\, \varrho^2 + 2\,(a_{13} \cos \Theta + a_{23} \sin \Theta)\, \varrho + a_{33} = o$$

$$\text{Daher ist } \varrho_0 = -\frac{a_{33}}{a_{13} \cos \Theta + a_{23} \sin \Theta} \tag{3}$$

*) S. Gudermann pag. 57.

und die Coordinaten dieses Punktes sind

$$x = \varrho_0 \cos \Theta, \; y = \varrho_0 \sin \Theta . \tag{4}$$

Die Polare des Coordinatenanfangs $a_{13} x + a_{23} y + a_{33} = o$ schneidet die Grade $y = tg\,\Theta . x$ in dem Punkt (ξ, η):

$$\left.\begin{aligned} \xi &= - \frac{a_{33} \cos \Theta}{a_{13} \cos \Theta + a_{23} \sin \Theta} = \varrho_0 \cos \Theta \\ \eta &= - \frac{a_{33} \sin \Theta}{a_{13} \cos \Theta + a_{23} \sin \Theta} = \varrho_0 \sin \Theta, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

also in dem Punkt (4).

Daher werden die Radiivectoren irgend eines Punktes von der Polare desselben und der Curve harmonisch getheilt.

Bezeichnet man den Punkt, in welchem die Polare von P die Cardinale schneidet, also den Durchschnittspunkt der Polaren mit dem ihr parallelen Durchmesser $M^1 N^1$ (Fig. 11), mit P', so ist die Polare von P' der den Punkt P enthaltende Durchmesser $M N$. Es wird nun nach dem Vorigen auch die Polare des Punktes P in den Punkten $P', \varsigma_1, \varsigma_0, \varsigma_2$ harmonisch getheilt, ebenso wie alle übrigen von P' ausgehenden Radiivectoren, da sie Polaren von Punkten sind, die im Durchmesser $M N$ liegen. $M N$ und $M^1 N^1$ sind aber conjugirte Durchmesser und berücksichtigt man, dass alle von P' ausgehende Radiivectoren dem Durchmesser $M^1 N^1$ parallel sind, so folgt daraus der wichtige Satz, dass

> die einem Durchmesser parallelen Sehnen von dem conjugirten Durchmesser und der Cardinalen harmonisch getheilt werden.

Im Falle die conjugirten Durchmesser die rechtwinkligen sind, ist der Bogen $P'\varsigma_0 = 90^0$ und aus der harmonischen Proportion

$$\sin P'\varsigma_1 \sin (P'\varsigma_2 - P'\varsigma_0) = \sin P'\varsigma_2 \sin (P'\varsigma_0 - P'\varsigma_1) \tag{6}$$

folgt

$$\begin{aligned} - \sin P'\varsigma_1 \cos P'\varsigma_2 &= \sin P'\varsigma_2 \cos P'\varsigma_1 \\ tg\, P'\varsigma_1 &= - tg\, P'\varsigma_2 \\ P'\varsigma_1 + P'\varsigma_2 &= 180^0 \\ \sin P'\varsigma_1 &= \sin P'\varsigma_2 \end{aligned} \tag{7}$$

und weiter aus (6) und (7)

$$P'\varsigma_2 - P'\varsigma_0 = P'\varsigma_0 - P'\varsigma_1 \tag{8}$$

Also werden die einer Hauptaxe parallelen Sehnen von der conjugirten Hauptaxe halbirt.

Specielle Gleichungsformen des sphärischen Kegelschnitts.

§. 7. Die Ellipse.

Die Ellipse bezogen auf die rechtwinkligen conjugirten Durchmesser, welche wir kurz ihre Axen nennen wollen, hat die Gleichung:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{1}$$

wobei a die trigonometrische Tangente der grossen Halbaxe, b die der kleinen Halbaxe sein soll.

Ein Halbmesser $y = tg\,\Theta . x$ hat die Grösse:

$$\varrho = a\,b \sqrt{\frac{1 + tg^2 \Theta}{b^2 + a^2\, tg^2 \Theta}} = \frac{a\,b}{\sqrt{b^2 + (a^2 - b^2) \sin^2 \Theta}} \tag{2}$$

Wie hieraus leicht ersichtlich, ist ϱ ein Maximum für $\Theta = o$ und ein Minimum für $\Theta = 90^0$. Es ist also die grosse Axe ($2\,a$) zugleich der grösste und ($2\,b$) der kleinste Durchmesser. Die Halbmesser wachsen von b bis a mit abnehmenden $tg\,\Theta$ und sind für $\pm\, tg\,\Theta$ gleich.

Aus der Gleichung (1) folgt:

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}; \tag{3}$$

für einen der Ellipse concentrischen Kreis mit dem Halbmesser a erhält man für die gleiche Abscisse:

$$y = \pm \sqrt{a^2 - x^2}; \text{*)} \tag{4}$$

und es verhalten sich also die zu derselben Abscisse gehörigen Ellipsen- und Kreis-Ordinaten wie die kleine Halbaxe zur grossen, oder

$$y_e : y_x = b : a.$$

Bezeichnet man mit Gudermann die Senkrechte vom Curvenpunkt auf die Xaxe mit „Applikate y'“, so ist:

$$\left.\begin{aligned} y'_e &= \frac{y_e}{\sqrt{1 + x^2}}, \quad y'_x = \frac{y_x}{\sqrt{1 + x^2}} \\ \text{also besteht auch die Proportion:} \quad & \\ y'_e &: y'_x = b : a \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Es ergiebt sich hieraus folgende Construction eines der Abscisse x, zugehörigen Ellipsenpunktes. Es sei (Fig. 12) $O\,x, Y$ ein Hauptschnitt durch den Cardinalpunkt Y und den Punkt x,, also $O\,x$, gleich dem Radius der Kugel. x, A sei eine Tangente am Kreise x, Y im Punkte x,; $\overset{\frown}{x, a}$ sei gleich der grossen Halbaxe, $\overset{\frown}{x, b}$ gleich der kleinen Halbaxe und $\overset{\frown}{x, y'_x}$ gleich der zu x, gehörigen Applicate des concentrischen Nebenkreises; ferner x, A, x, B, x, M die diesen Bogen entsprechenden Tangenten, so dass

$$\frac{x, A}{O\,x,} = a, \quad \frac{x, B}{O\,x,} = b, \quad \frac{x, M}{O\,x,} = y'_x \text{ ist.}$$

Man bestimme nun den Punkt N so, dass $x, N : x, M = x, B : x, A$ ist, alsdann ist $\frac{x, N}{O\,x,} = y'_e$ und der Durchschnitt von $O\,N$ mit dem Hauptkreise x, Y erfüllt die Bedingung (5) und ist der gesuchte Ellipsenpunkt.

Die Gleichung der Tangente am Curvenpunkte $(x,, y,)$ oder die Polare eines ausserhalb der Curve gelegenen Punktes $(x,, y,)$ ist:

$$x \frac{x,}{a^2} + y \frac{y,}{b^2} = 1. \tag{6}$$

Ein zum Durchmesser $y = \alpha\, x$ conjugirter Durchmesser $y = -\frac{b^2}{a^2\,\alpha} x$ hat mit der Curve die Punkte

$$x = \pm \frac{a^2\,\alpha}{\sqrt{a^2\,\alpha^2 + b^2}}, \quad y = \mp \frac{b^2}{\sqrt{a^2\,\alpha^2 + b^2}} \tag{7}$$

gemein; die Tangenten an diese Punkte sind:

$$y = \alpha\, x \pm \sqrt{a^2\,\alpha^2 + b^2} \tag{8}$$

also parallel dem ersten Durchmesser. Es folgt daraus der schon früher allgemein bewiesene Satz:

> Die Tangenten in den Endpunkten eines Durchmessers sind dem conjugirten Durchmesser parallel.

Der zur Polaren $x \frac{x,}{a^2} + y \frac{y,}{b^2} = 1$ parallele Durchmesser ist:

---

*) S. §. 10, Gleichung (5).

$$y = -\frac{b^2 x_,}{a^2 y_,} x$$

der hierzu conjugirte: $$y = \frac{y_,}{x_,} x \qquad (9)$$

welcher durch den Pol $(x_,, y_,)$ geht.

Also alle Polaren der Punkte eines Durchmessers sind dem conjugirten Durchmesser parallel.

Die Verbindungslinie der Punkte:

$$\left.\begin{matrix} -a, o \\ x_,, y_, \end{matrix}\right\} \text{ und } \left.\begin{matrix} +a, o \\ x_,, y_, \end{matrix}\right\} \text{ sind:}$$

$$y = \frac{y_,}{x_, + a} x + a y_, \quad \text{und} \quad y = \frac{y_,}{x_, - a} x - a y_,, \qquad (10)$$

die hierzu parallelen Durchmesser sind:

$$y = \frac{y_,}{x_, + a} x, \; y = \frac{y_,}{x_, - a} x. \qquad (11)$$

Durch die Substitution $y_,^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$ wird die letzte der Gleichungen (11):

$$y = -\frac{b^2 (x_, + a)}{a^2 y_,} x,$$

d. h. die beiden Durchmesser (11) sind conjugirt.

Die Graden (10), welche denselben Curvenpunkt mit den Scheiteln der Hauptaxe verbinden, werden Supplementarsehnen genannt. Daher sind Durchmesser, welche Supplementarsehnen parallel sind, conjugirt.

Die Länge eines Halbmessers $y = a x = \frac{y_,}{x_,} x$ ist

$$a_, = \frac{a b \sqrt{1 + a^2}}{\sqrt{a^2 a^2 + b^2}} = \sqrt{x_,^2 + y_,^2}$$

die des ihm conjugirten Halbmessers: $$b_, = \sqrt{\frac{a^4 a^2 + b^4}{a^2 a^2 + b^2}} = \sqrt{\frac{b^2 x_,^2}{a^2} + \frac{a^2 y_,^2}{b^2}} \qquad (12)$$

also ist $$a_,^2 + b_,^2 = a^2 + b^2 \qquad (13)$$

für den Winkel, welchen die conjugirten Durchmesser einschliessen, erhält man

$$\sin \varphi = \frac{a^2 a^2 + b^2}{\sqrt{(1 + a^2)(a^4 a^2 + b^4)}} = \frac{a b}{a_, b_,}; \quad a_, b_, \sin \varphi = a b. \qquad (14)$$

Wie ferner leicht zu beweisen, sind parallele Sehnen, welche gleiche Entfernung vom Mittelpunkt haben, einander gleich; ebenso die in Fig. 13 mit gleichen Zeichen versehenen Stücke und Verbindungslinien, welche symmetrisch zu beiden Seiten der zugehörigen conjugirten Durchmesser liegen.

Die Gleichung der Normalen zum Punkte $(x_,, y_,)$ ist:

$$\frac{y - y_,}{x - x_,} = \frac{a^2 y_,}{b^2 x_,} \frac{1 + b^2}{1 + a^2} \qquad (15)$$

für $y = o$ findet man ihren Durchschnitt mit der Abscisse:

$$x = \left(1 - \frac{b^2 (1 + a^2)}{a^2 (1 + b^2)}\right) x_, \quad = \left[\frac{c^2}{a^2} x_,\right] \qquad (16)$$

Brennpunkte:

Die Entfernungen des Curvenpunktes $(x_,, y_,)$ von den Punkten $(+c, o)$ und $(-c, o)$ sind:

$$\frac{\sqrt{(x_, - c)^2 + y_,^2 (1 + c^2)}}{1 + c x_,} \text{ und } \frac{\sqrt{(x_, + c)^2 + y_,^2 (1 + c^2)}}{1 - c x_,}. \tag{17}$$

Die Ausdrücke unter den Wurzelzeichen sind vollständige Quadrate für:

$$c^2 = \frac{a^2 - b^2}{1 + b^2} \tag{18}$$

Die Grössen (17) werden alsdann:

$$\frac{a - \frac{c}{a} x_,}{1 + c x_,}, \quad \frac{a + \frac{c}{a} x_,}{1 - c x_,} \tag{19}$$

und die Tangente der Summe der Bogen (19) ist in Rücksicht, dass $tg(\alpha + \beta) = \frac{tg\,\alpha + tg\,\beta}{1 - tg\,\alpha\, tg\,\beta}$,

$$= \frac{\frac{a - \frac{c}{a} x_,}{1 + c x_,} + \frac{a + \frac{c}{a} x_,}{1 - c x_,}}{1 - \frac{a^2 - \frac{c^2}{a^2} x_,^2}{1 - c^2 x_,^2}} = \frac{2a}{1 - a^2}, \tag{20}$$

d. h. die Summe der Bogen $\left.\begin{matrix} +c, o \\ x, y, \end{matrix}\right\} + \left.\begin{matrix} -c, o \\ x_,, y_, \end{matrix}\right\}$ ist constant gleich dem Bogen $(2a)$, gleich der grossen Axe. Die Punkte $\left.\begin{matrix} x = \pm c \\ y = o \end{matrix}\right\}$ sind die Brennpunkte der Ellipse und ihre Verbindungslinien mit dem Curvenpunkte $(x_,, y_,)$ die Brennstrahlen desselben.

Daher ist die Summe der Brennstrahlen eines Ellipsenpunktes gleich der Hauptaxe.

Die Brennstrahlen zu $(x_,, y_,)$ haben die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} y_, (x + c) &= (x_, + c)\, y \\ y_, (x - c) &= (x_, - c)\, y \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Die Gleichung der Halbirungslinie ihres Winkels ist (durch Gleichsetzung der Senkrechten von einem ihrer Punkte (x, y) auf die Brennstrahlen):

$$\pm \frac{y_, (x + c) - (x_, + c)\, y}{\sqrt{\{(x_, + c)^2 + y_,^2 (1 + c^2)\}}} = \frac{y_, (x - c) - (x_, - c)\, y}{\sqrt{\{(x_, - c)^2 + y_,^2 (1 + c^2)\}}} \tag{22}$$

Setzt man für die Nenner die Werthe (19) ein, so erhält man:

$$\pm \frac{y_, (x + c) - (x_, + c)\, y}{a + \frac{c}{a} x_,} = \frac{y_, (x - c) - (x_, - c)\, y}{a - \frac{c}{a} x_,} \tag{23}$$

und unter Vernachlässigung des unteren Zeichens nach einfacher Umformung:

$$(a^2 - x_,^2)\, y = y_, (a^2 - x_, x);$$

oder unter Berücksichtigung, dass $y_,^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x_,^2)$ ist,

$$a^2\, y\, y_, = b^2 (a^2 - x_, x)$$

also: $x \frac{x_,}{a^2} + y \frac{y_,}{b^2} = 1$ die Gleichung der Tangente. (24)

Nimmt man dagegen in (23) das untere Vorzeichen, so erhält man:

$$x_, y (a^2 - c^2) = y_, (a^2 x - c^2 x_,) \tag{25}$$

oder da $c^2 = \frac{a^2 - b^2}{1 + b^2}$, $a^2 - c^2 = b^2 (1 + c^2)$

$$a^2 y, x - b^2 (1 + c^2) x, y - c^2 x, y, = o, \tag{26}$$

welches die Gleichung der Normale ist.

Es folgt daraus,

dass die Tangente und Normale eines Ellipsenpunktes die äussere resp. innere Halbirungslinie des Winkels der zugehörigen Brennstrahlen ist;

oder dass die Brennstrahlen mit den Tangenten oder Normalen gleiche Winkel bilden.

Ort der Fusspunkte der Senkrechten vom Brennpunkte auf die Tangente.

Die Senkrechte vom Brennpunkte $(\pm c, o)$ auf die Tangente

$$\left.\begin{aligned} \frac{x\,x,}{a^2} + \frac{y\,y,}{b^2} &= 1 \text{ ist:} \\ y, &= \frac{\frac{y,}{b^2}}{\frac{x,}{a^2} \pm c} (x \mp c). \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

Bestimmt man aus diesen beiden Gleichungen die Werthe $x,$ und $y,$, so erhält man:

$$x, = \frac{a^2 (x \mp c [1 + y^2])}{x^2 + y^2 \mp c x}, \quad y, = \frac{b^2 y (1 \pm c x)}{x^2 + y^2 \mp c x}; \tag{30}$$

dieselben müssen zugleich die Gleichung

$$\frac{x,^2}{a^2} + \frac{y,^2}{b^2} = 1$$

erfüllen, woraus die Gleichung des Ortes folgt:

$$a^2 (x \mp c [1 + y^2])^2 + b^2 y^2 (1 \pm c x)^2 = (x^2 + y^2 \mp c x)^2. \tag{31}$$

Diese Gleichung nach den höchsten Potenzen von x und y geordnet, wird:

$$\begin{aligned} &x^4 + x^2 y^2 (2 - b^2 c^2) + y^4 (1 - a^2 c^2) \pm 2 c x \{y^2 (1 - a^2 + b^2) + x^2\} \\ &- \{(a^2 - c^2) x^2 + (b^2 + 2 a^2 c^2) y^2\} \mp 2 a^2 c x - a^2 c^2 = o. \end{aligned} \tag{32}$$

Es ist nun:

$$\left.\begin{aligned} 2 - b^2 c^2 &= 1 + c^2 + 1 - a^2 + b^2 \\ 1 - a^2 c^2 &= 1 + c^2 - c^2 (1 + a^2) = (1 + c^2) (1 - a^2 + b^2) \\ b^2 + 2 a^2 c^2 &= c^2 (1 - a^2 + b^2) - a^2 (1 + c^2) \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

Durch Substitution dieser Werthe in (32) erhält man:

$$\left.\begin{aligned} &x^2 \{x^2 + y^2 (1 - a^2 + b^2) - a^2\} + y^2 (1 + c^2) \{x^2 + y^2 (1 - a^2 + b^2) - a^2\} \\ &\pm 2 c x \{x^2 + y^2 (1 - a^2 + b^2) - a^2\} + c^2 \{x^2 + y^2 (1 - a^2 + b^2) - a^2\} = o \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

oder

$$\{(x \pm c)^2 + y^2 (1 + c^2)\} \{x^2 + y^2 (1 - a^2 + b^2\} - a^2 = o$$

und da $x = \mp c$, $y = o$ unmöglich Punkte der Curve sein können, also der erste Factor dieser Gleichung nicht gleich Null sein kann, so erhält man für den gesuchten Ort die quadratische Gleichung:

$$\left.\begin{aligned} &x^2 + y^2 (1 - a^2 + b^2) = a^2 \\ \text{oder} \quad &\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\frac{a^2}{1 - a^2 + b^2}} = 1. \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

Diese Gleichung stellt aber eine Ellipse dar, deren Hauptaxe in die Yaxe unseres Systems fällt, da $1 - a^2 + b^2 < 1$ ist, also $\frac{a^2}{1 - a^2 + b^2} > a^2$, und welche die Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, sie in den Scheitelpunkten $(\pm a, o)$ berührend, einschliesst.

Für $a = 1$ wird die Gleichung (35)

$$x^2 + b^2 y^2 = 1, \tag{36}$$

deren grosse Halbaxe die kleine Halbaxe der Ellipse (1) zu 90^0 ergänzt.

Für $a = \frac{1}{c}$ wird $1 - a^2 + b^2 = o$, da $b^2 = a^2 - 1$ ist; in diesem Falle geht (35) in die Gleichung der Scheiteltangenten $x = \pm a$ über und hat also der Kegelschnitt $c^2 x^2 + \frac{y^2}{b^2} = 1$ diese Eigenschaft mit der ebenen Parabel gemein.

Wir werden die letztgenannten Kegelschnitte später noch näher betrachten.

Directrix:

Die Polare des Brennpunkts $(\pm c, o)$ ist

$$x = \pm \frac{a^2}{c}. \tag{37}$$

Es hat diese Grade dieselbe Gleichung wie die Directrix der ebenen Kegelschnitte und in der That werden wir bei ihr analoge Eigenschaften finden.

Wenn d die Bogenentfernung der Punkte (a, b) und $(a_,, b_,)$ vorstellt, so ist:

$$\sin^2 d = \frac{(a_, - a)^2 + (a b_, - a_, b)^2 + (b_, - b)^2}{(1 + a^2 + b^2)(1 + a_,^2 + b_,^2)}. \tag{38}$$

Ebenso ist die senkrechte Entfernung r des Punktes (m, n) von der Graden $ax + by + c = o$:

$$\sin r^2 = \frac{(am + bn + c)^2}{(1 + m^2 + n^2)(a^2 + b^2 + c^2)}. \tag{39}$$

Daher ist für die Entfernung des Curvenpunktes $(x_,, y_,)$ von dem Brennpunkt $(\pm c, o)$

$$\sin^2 d = \frac{(x_, \mp c)^2 + y_,^2 (1 + c^2)}{(1 + x_,^2 + y_,^2)(1 + c^2)} = \frac{(c x_, \mp a^2)^2}{a^2 (1 + x_,^2 + y_,^2)(1 + c^2)} \tag{40}$$

und für den senkrechten Abstand desselben Punktes von der Brennpunktspolaren $c x \mp a^2 = o$:

$$\sin^2 r = \frac{(c x_, \mp a^2)^2}{(1 + x_,^2 + y_,^2)(c^2 + a^4)} \tag{41}$$

folglich ist:

$$\sin^2 r = \frac{a^2 (1 + c^2)}{c^2 + a^4} \sin^2 d. \tag{42}$$

Das Verhältniss der Sinusse der Bogenentfernung eines Curvenpunktes von der Brennpunktspolaren, der Directrix, und des zugehörigen Brennstrahls ist constant $= a \sqrt{\frac{1 + c^2}{c^2 + a^4}}$.

Zu bemerken ist hierbei noch, dass

$$\text{für } a \gtreqless 1, \quad \frac{a^2 (1 + c^2)}{c^2 + a^4} \lesseqgtr 1 \text{ wird,} \tag{43}$$

dass also auch, jenachdem

$$a \gtreqless 1, \text{ das Verhältniss } \frac{\sin r}{\sin d} \lesseqgtr 1 \text{ ist.} \tag{44}$$

Der Pol, der die Curvenpunkte (x_1, y_1) und (x_2, y_2) verbindenden Sehne $(y_2 - y_1)\, x - (x_2 - x_1)\, y = x_1 y_2 - x_2 y_1$ hat die Coordinaten:

$$\xi = a^2 \frac{y_2 - y_1}{x_1 y_2 - x_2 y_1}, \quad \eta = b^2 \frac{x_1 - x_2}{x_1 y_2 - x_2 y_1}. \tag{45}$$

Die Verbindungslinien dieser drei Punkte x_1, y_1 x_2, y_2 und ξ, η sind aber:

$$\begin{aligned} &\text{I.} \quad y_1 x - (x_1 - c)\, y - y_1 c = o \\ &\text{II.} \quad y_2 x - (x_2 - c)\, y - y_2 c = o \\ &\text{III.} \quad \eta x - (\xi - c)\, y - \eta c = o. \end{aligned} \tag{46}$$

Die Grade III. halbirt den Winkel von I. und II., wenn:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{y_1 \eta (1 + c^2) + (x_1 - c)(\xi - c)}{\sqrt{\{[y_1^2 (1 + c^2) + (x_1 - c)^2][\eta^2 (1 + c^2) + (\xi - c)^2]\}}} = \\ &= \frac{y_2 \eta (1 + c^2) + (x_2 - c)(\xi - c)}{\sqrt{\{[y_2^2 (1 + c^2) + (x_2 - c)^2][\eta^2 (1 + c^2) + (\xi - c)^2]\}}}, \end{aligned}\right\} \tag{47}$$

welche Gleichung in Rücksicht auf (17) und (19) übergeht in:

$$\frac{y_1 \eta (1 + c^2) + (x_1 - c)(\xi - c)}{a^2 - c x_1} = \frac{y_2 \eta (1 + c^2) + (x_2 - c)(\xi - c)}{a^2 - c x_2}. \tag{48}$$

Durch einfache Umformungen wird (48):

$$\eta (1 + c^2)\,[y_1 (a^2 - c x_2) - y_2 (a^2 - c x_1)] = (\xi - c)[(x_2 - c)(a^2 - c x_1) - (x_1 - c)(a^2 - c x_2)]$$

$$\eta (1 + c^2)[a^2 (y_1 - y_2) - c (y_1 y_2 - x_2 y_2)] = (\xi - c)(x_2 - x_1)(a^2 - c^2)$$

oder da $a^2 - c^2 = b^2 (1 + c^2)$ ist:

$$\eta \left[a^2 \frac{y_2 - y_1}{x_1 y_2 - x_2 y_1} - c \right] = (\xi - c)\, b^2 \frac{x_1 - x_2}{x_1 y_2 - x_2 y_1}, \tag{49}$$

welche Gleichung mit Rücksicht auf (45) identisch erfüllt ist:

$$\eta (\xi - c) \equiv (\xi - c)\, \eta.$$

Es folgt daraus, dass die Verbindungslinie eines Punktes mit dem Brennpunkt den Winkel halbirt, den die Polarsehne jenes Punktes am Brennpunkte spannt.

Weiter folgt daraus: Geht die Sehne durch den Brennpunkt selbst, so steht die Verbindungslinie desselben mit dem Pol jener Sehne, welcher in der Directrix liegt, senkrecht auf ihr.

Dies letztere kann leicht direct bewiesen werden.

Die Polare eines Punktes der Directrix $(\pm \frac{a^2}{c}, y_1)$ hat die Gleichung:

$$\frac{x}{\pm c} + \frac{y y_1}{b^2} = 1. \tag{50}$$

Die Verbindungslinie desselben Punktes mit dem Brennpunkt ist:

$$y_1 x \mp \left(\frac{a^2}{c} - c \right) y \mp c y_1 = o. \tag{51}$$

Die beiden Graden (50) und (51) stehen auf einander senkrecht, da:

$$\frac{y_1}{\pm c} \mp \frac{y_1 (a^2 - c^2)}{b^2 c} \pm c y_1 \equiv o \text{ ist.} \tag{52}$$

Bewegt sich also ein rechter Winkel um den Brennpunkt als seinen Scheitel, so ist der eine Schenkel immer die Polare des Durchschnittspunktes des andern Schenkels mit der Directrix; welche Eigenschaft der sphärische Kegelschnitt genau mit den ebenen Kegelschnitten gemein hat.

§. 8. Die Hyperbel.

Transformirt man die Gleichung $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ auf das in der Yaxe gelegene zweite Centrum (o, ∞) mittelst der Formeln (30) §. 3, worin für diesen Fall $\alpha = 90^0$ zu setzen ist, und welche nach einfacher Vertauschung der Axen die Form haben:

$$x = \frac{y_,}{-x_,}, \quad y = \frac{1}{-x_,}, \tag{1}$$

so erhält man die hyperbolische Gleichung:

$$\frac{x^2}{\frac{1}{b^2}} - \frac{y^2}{\frac{a^2}{b^2}} = 1. \tag{2}$$

Transformirt man auf das dritte Centrum in der Xaxe (∞, o), indem jetzt $\alpha = o$ ist, mittelst der Formeln:

$$x = -\frac{1}{x_,}, \quad y = +\frac{y_,}{x_,} \tag{3}$$

so erhält man die hyperbolische Gleichung:

$$\frac{x^2}{\frac{1}{a^2}} - \frac{y^2}{\frac{b^2}{a^2}} = 1. \tag{4}$$

Zur allgemeinen Betrachtung der Hyperbel geben wir den Gleichungen (2) und (4) die gemeinsame Form:

$$\frac{x^2}{m^2} - \frac{y^2}{n^2} = 1. \tag{5}$$

Der Halbmesser dieser Curve $y = tg\,\Theta \,.\, x$ hat die Grösse

$$\varrho = m\,n\,\frac{\sqrt{1 + tg^2\,\Theta}}{\sqrt{n^2 - m^2\,tg^2\,\Theta}} = \frac{m\,n}{\sqrt{n^2 - (m^2 + n^2)\,sin^2\,\Theta}}. \tag{6}$$

Es ist daher ϱ ein Minimum für $\Theta = o$, d. h. für $\varrho = m$, und ein Maximum für $tg\,\Theta = \pm\frac{n}{m}$, also für $\varrho = \infty$. Bei weiter wachsendem Θ wird ϱ imaginär. Es ist also bei der Hyperbel die Halbaxe m der kleinste reelle Halbmesser.

Die Gleichungen der conjugirten Durchmesser sind:

$$y = \alpha\,x \text{ und } y = \frac{n^2}{m^2\,\alpha}\,x \tag{7}$$

die Grössen der entsprechenden Halbmesser:

$$m_,^2 = \frac{m^2\,n^2\,(1 + \alpha^2)}{n^2 - m^2\,\alpha^2}, \quad n_,^2 = -\frac{n^4 + m^4\,\alpha^2}{n^2 - m^2\,\alpha^2}. \tag{8}$$

Aus den Gleichungen (7) folgt, dass die hyperbolischen conjugirten Durchmesser im Gegensatz zu den elliptischen beide spitze Winkel mit der Xaxe bilden. Für $\alpha = \pm\frac{n}{m}$ werden die Gleichungen (7) identisch; $m_,$ und $n_,$ fallen zusammen und werden gleich ∞.

Es werden diese Durchmesser die Asymptoten genannt und ihre Gleichungen sind:

$$\left.\begin{array}{ll} & \frac{x}{m} + \frac{y}{n} = o, \quad \frac{x}{m} - \frac{y}{n} = o \\ \text{oder} & \frac{x^2}{m^2} - \frac{y^2}{n^2} = o. \end{array}\right\} \tag{9}$$

Ebenso haben sie, auf irgend welche conjugirte Halbmesser $m_,$ und $n_,$ bezogen, die Gleichung

$$\frac{x^2}{m_,^2} - \frac{y^2}{n_,^2} = o. \tag{10}$$

Man erhält allgemein die Gleichung der Asymptoten, indem man die Summe der höchsten Potenzen der Variabelen der Curvengleichung gleich Null setzt.

Die Gleichung der Tangente und Polare ist natürlich:

$$\frac{x\,x_,}{m^2} - \frac{y\,y_,}{n^2} = 1. \tag{11}$$

Wir unterlassen hier, alle die Eigenschaften der Tangenten, Polaren und conjugirten Durchmesser, welche wir bei der Ellipse kennen gelernt haben und auch der Hyperbel eigen sein müssen, besonders für dieselbe abzuleiten, und betrachten nur näher die Eigenschaften der neu auftretenden Linien, der Asymptoten.

Die Asymptoten schneiden die in den Endpunkten eines Durchmessers gezogenen Tangenten in den Punkten $(\pm m_,, \pm n_,)$, bezogen auf die entsprechenden conjugirten Durchmesser, wobei $m_,$ und $n_,$ die Grössen (8) sind, und es ist leicht nachzuweisen, dass die Strecken

$$\left.\begin{matrix} m_,, o \\ m_,, n_, \end{matrix}\right\} = \left.\begin{matrix} -m_,, o \\ -m_,, -n_, \end{matrix}\right\}, \quad \left.\begin{matrix} m_,, o \\ m_,, -n_, \end{matrix}\right\} = \left.\begin{matrix} -m_,, o \\ -m_,, n_, \end{matrix}\right\} \text{ sind,} \tag{12}$$

während das zwischen die Asymptoten fallende Stück der Tangenten im Berührungspunkt nicht halbirt wird. Denn die Entfernungen

$$\left.\begin{matrix} m_,, o \\ m_,, n_, \end{matrix}\right\} \text{ und } \left.\begin{matrix} m_,, o \\ m_,, -n_, \end{matrix}\right\} \text{ sind:}$$

$$\frac{n_,^2\,(1 + m_,^2 \sin^2 \nu)}{(1 + m_,^2 + n_,^2 + 2\,m_,\,n_,\cos\nu)\,(1 + m_,^2)} \text{ und } \frac{n_,^2\,(1 + m_,^2 \sin^2 \nu)}{(1 + m_,^2 + n_,^2 - 2\,m_,\,n_,\cos\nu)\,(1 + m_,^2)} \tag{13}$$

wobei ν der Winkel zwischen den conjugirten Durchmessern bedeutet. Berücksichtigt man, dass $m_,^2 + n_,^2 \pm 2\,m_,\,n_,\cos\nu$ die Abschnitte auf den Asymptoten sind, gleich $tg\,z$ und $tg\,z_,$, so verhalten sich die trigonometrischen Tangenten der Tangentenstücke vom Berührungspunkt bis zum Durchschnitt mit den Asymptoten wie $\cos z$ zu $\cos z_,$, wie die Cosinusse der entsprechenden Asymptotenabschnitte.

Allgemein werden die Graden $x = \pm r$ von den Asymptoten so geschnitten, dass die Entfernungen

$$\left.\begin{matrix} r, o \\ r, \dfrac{n_,}{m_,} r \end{matrix}\right\} = \left.\begin{matrix} -r, o \\ -r, -\dfrac{n_,}{m_,} r \end{matrix}\right\}, \quad \left.\begin{matrix} r, o \\ r, -\dfrac{n_,}{m_,} r \end{matrix}\right\} = \left.\begin{matrix} -r, o \\ -r, +\dfrac{n_,}{m_,} r \end{matrix}\right\} \text{ sind.} \tag{14}$$

Da nun dieselben Graden analog §. 7 Fig. 13 von Curve und Durchmesser auf gleiche Weise getheilt werden, so sind auch die symmetrisch liegenden Stücke zwischen Asymptoten und Curve einander gleich.

Soll die Tangente $\frac{x\,x_,}{m^2} - \frac{y\,y_,}{n^2} = 1$ durch das Centrum gehen, so muss $x_, = y_, = \infty$ sein, d. h. die Asymptoten sind die Tangenten an die Hyperbel vom Centrum aus und berühren dieselbe in den Endpunkten einer elliptischen Axe, was auch daraus gefolgert werden konnte, dass die Centrumspolare eine Hauptaxe des Kegelschnitts ist.

Transformirt man die Gleichung $\frac{x^2}{m^2} - \frac{y^2}{n^2} = 1$ auf die Asymptoten mittelst der Formeln:

$$x = \frac{m}{\sqrt{m^2 + n^2}}\,(x_, + y_,), \quad y = -\frac{n}{\sqrt{m^2 + n^2}}\,(x_, - y_,) \tag{15}$$

so ist die Asymptotengleichung der Hyperbel:

$$4\,x_,\,y_, = m^2 + n^2 \tag{16}$$

oder indem man wieder x und y setzt und $m^2 + n^2 = \varkappa^2$:

$$x\,y = \left(\frac{\varkappa}{2}\right)^2. \tag{17}$$

Hierfür nehmen Tangenten- und Polargleichung die Form an:

$$\left.\begin{aligned} x\,y' + x,\,y &= 2\left(\frac{\varkappa}{2}\right)^2 \\ \text{oder durch Division mit} \qquad x,\,y, &= \left(\frac{\varkappa}{2}\right)^2 \\ \frac{x}{x,} + \frac{y}{y,} &= 2. \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Brennpunkte:

Die Ausdrücke unter den Wurzelzeichen der Grössen (17) §. 7:

$$\frac{\sqrt{(x, - c)^2 + y,^2\,(1 + c^2)}}{1 + c\,x,} \text{ und } \frac{\sqrt{(x, + c)^2 + y,^2\,(1 + c^2)}}{1 - c\,x,} \tag{19}$$

werden für die Hyperbel vollständige Quadrate, wenn:

$$\left.\begin{aligned} c^2 &= \frac{m^2 + n^2}{1 - n^2}, \\ \text{also } 1 + c^2 &= \frac{1 + m^2}{1 - n^2},\ c^2 - n^2\,(1 + c^2) = m^2,\ 1 + \frac{n^2}{m^2}\,(1 + c^2) = \frac{c^2}{m^2}. \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Die Grössen (19) werden dadurch:

$$\frac{\frac{c}{m}\,x, - m}{1 + c\,x,} \text{ und } \frac{\frac{c}{m}\,x, + m}{1 - c\,x,}. \tag{21}$$

Die trigonometrische Tangente der Differenz der Brennstrahlen ist daher:

$$\frac{\frac{\frac{c}{m}\,x, + m}{1 - c\,x,} - \frac{\frac{c}{m}\,x, - m}{1 + c\,x,}}{1 + \frac{\frac{c^2}{m^2}\,x,^2 - m^2}{1 - c^2\,x,^2}} = \frac{2\,m}{1 - m^2}, \tag{22}$$

d. h. die Differenz der Brennstrahlen ist gleich der reellen Axe ($2\,m$).

Führt man in (20) für m und n die elliptischen Halbaxen ein, so erhält man für die Hyperbel (4), wo $m^2 = \frac{1}{a^2}$, $n^2 = \frac{b^2}{a^2}$ ist:

$$c^2 = \frac{1 + b^2}{a^2 - b^2}, \tag{23}$$

also die Brennpunktsabscisse ergänzt die der Ellipse §. 7 (18) zu 90^0, wie voraus zu sehen war.

Für die Hyperbel (2) dagegen, wo $m^2 = \frac{1}{b^2}$, $n^2 = \frac{a^2}{b^2}$ ist, würde $c^2 = \frac{1 + a^2}{b^2 - a^2}$, also $< o$ sein.

Diese Hyperbel hat daher in ihrer rellen Axe keine Brennpunkte; dagegen besitzt sie, wie leicht ersichtlich (Fig. 14) in der Cardinale ihres Centrums die 4 Brennpunkte A, B, C, D, von denen je zwei A und C, B und D Gegenpunkte sind. Ihre Zusammengehörigkeit bestimmt sich auf folgende Weise:

Bezeichnet man die Brennstrahlen eines Curvenpunktes P, AP mit r und BP mit $r_,$, so ist nach §. 7 (20)

$$r + r_, = (2\,a),$$
$$\text{folglich } CP + DP = 180^0 - r, + 180^0 - r$$
$$= 360^0 - (2\,a)$$

ergänzt also die elliptische grosse Axe zu 360^0.

$$\text{Ferner } CP - BP = 180^0 - r, - r = 180^0 - (2\,a);$$

ist also Supplement dieser Axe.

$$\text{Ferner } DP - AB = 180^0 - r - r, = 180^0 - (2\,a),$$

dasselbe Supplement.

Es sind daher A und B, C und D zusammengehörige elliptische Brennpunkte; die Summe der zugehörigen Brennstrahlen ist constant.

B und C, A und D sind hyperbolische Brennpunkte; die Differenz der zugehörigen Brennstrahlen ist constant.

Wechselt man in der Hyperbelgleichung (5) nämlich $\frac{x^2}{m^2} - \frac{y^2}{n^2} = 1$ die Vorzeichen, wodurch die vorher reellen Durchmesser imaginär und umgekehrt die imaginären reell werden, so erhält man die Gleichung der conjugirten Hyperbel

$$-\frac{x^2}{m^2} + \frac{y^2}{n^2} = 1. \tag{24}$$

Durch Subtraction der Gleichung (24) und (5) und Division mit 2 erhält man:

$$\frac{x^2}{m^2} - \frac{y^2}{n^2} = 0 \text{ die Gleichung der Asymptoten.}$$

Die beiden conjugirten Hyperbeln haben also die Asymptoten gemein und berühren sich in den Endpunkten der kleinen elliptischen Axen.

Die Hyperbel (4) hat die conjugirte:

$$\frac{y^2}{\frac{b^2}{a^2}} - \frac{x^2}{\frac{1}{a^2}} = 1 \tag{25}$$

oder mittelst der Formeln $x = -\frac{x_,}{y_,}$, $y = -\frac{1}{y_,}$ auf das elliptische Centrum transformirt:

$$\frac{x^2}{\frac{1}{b^2}} + \frac{y^2}{\frac{a^2}{b^2}} = 1. \tag{26}$$

Die Grössenverhältnisse der Axen dieser Curve hängen von a ab; für $a = 1$ wird sie ein Kreis.

Die Hyperbel (2) hat die conjugirte:

$$\frac{y^2}{\frac{a^2}{b^2}} - \frac{x^2}{\frac{1}{b^2}} = 1 \tag{27}$$

oder auf ihr elliptisches Centrum, welches zugleich das Centrum der Hyperbel (4) ist, transformirt:

$$\frac{x^2}{\frac{1}{a^2}} + \frac{y^2}{\frac{b^2}{a^2}} = 1, \tag{28}$$

welche für $b = 1$ ein Kreis wird.

Ausserdem hat der Kegelschnitt (28) dieselben Axen wie (4) und (25), welche für $b = 1$ gleichseitige Hyperbeln werden, und welche also (28) in den 4 Scheiteln berühren. Ein Gleiches findet statt mit (26) durch (2) und (27), welche für $a = 1$ gleichseitig werden.

§. 9. Einige Haupteigenschaften, welche die Kegelschnitte $x^2 + \frac{y^2}{b^2} = 1$ uud $c^2\,x^2 + \frac{y^2}{b^2} = 1$ mit der ebenen Parabel gemein haben.

Die besonderen Eigenschaften der ebenen Parabel können dadurch erklärt und abgeleitet werden, dass man

1) den Scheitel einer Ellipse festhält und das Centrum in das Unendliche rücken lässt;
2) bei festem Scheitel die grosse Axe gleich Unendlich werden lässt;
3) bei festem Brennpunkt den entgegengesetzten Scheitel in das Unendliche rücken lässt.

Diese drei verschiedenen Fälle werden in der Ebene identisch, da im Unendlichen die Punkte: Centrum, zweiter Brennpunkt und zweiter Scheitel zusammenfallend gedacht werden, und da durch einen der drei Vorgänge auch die übrigen stattfinden. Daher erhält man jedesmal dieselbe Curve. Man kann dagegen voraussehen, dass diese Identität auf der Kugel nicht stattfindet und man es nach den der Kugel entsprechenden Vorgängen 1 bis 3 mit verschiedenen Kegelschnitten zu thun hat, welche sich in die Haupteigenschaften der ebenen Parabel theilen werden.

Transformirt man die Ellipsengleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{1}$$

auf den Punkt $(-a, o)$ als Anfang mittelst der Formeln:

$$x = \frac{x, - a}{1 + a\,x,}, \quad y = \frac{y,\sqrt{1 + a^2}}{1 + a\,x,}, \tag{2}$$

so erhält man die Scheitelgleichung:

$$b^2\,(1 - a^2)\,x,^2 + a^2\,y,^2 - 2\,a\,b^2\,x, = o. \tag{3}$$

Setzt man **1)** $a = \infty$, so wird die Gleichung (3)

$$y^2 = b^2\,x^2, \tag{4}$$

welches die Gleichung zweier Graden ist, welche durch den Anfang gehen, parallel sind und als grösste Entfernung $(2\,b)$ die kleine Axe der Ellipse haben. Man hat es also in diesem Falle mit keinem Kegelschnitt zu thun, sondern mit einem Kugelzweieck. In Folge dessen werden die dahin gehörigen Eigenschaften der ebenen Parabel, wie der Parallelismus der Durchmesser, bei einem sphärischen Kegelschnitt nicht möglich sein.

Setzt man **2)** in der Gleichung (3) $tg\,(2\,a) = \infty$, also $a = 1$, so geht diese über in:

$$y^2 = 2\,b\,x, \tag{5}$$

welche Gleichung mit der Scheitelgleichung der ebenen Parabel vollständig übereinstimmt. Untersuchen wir, welche Eigenschaften sie mit derselben gemein hat.

Der Brennpunkt hat auf diese Axen bezogen die Coordinaten:

$$x = \frac{1 - c}{1 + c}, \quad y = o. \tag{6}$$

Die Brennpunktsapplikate ist daher:

$$y'^2 = \frac{2\,b^2\,\frac{1 - c}{1 + c}}{1 + \left(\frac{1 - c}{1 + c}\right)^2} = b^4 \tag{7}$$

$$y' = b^2 = \frac{1 - c^2}{2\,c} = \frac{2\,e}{1 + e^2} \tag{8}$$

wenn wir mit e die Brennpunktsabscisse bezeichnen, während c den früheren Werth hat. Ist also

$2\,b^2$ der Parameter der Curve, so ist die Brennpunktsapplikate gleich dem Halbparameter. Dagegen ist die Brennpunktsabscisse

$$e = \frac{1 - \sqrt{1 - b4}}{b^2}, \tag{9}$$

also nicht gleich dem Viertelparameter.

Schreiben wir die Gleichung (5) der Kürze und Analogie wegen

$$y^2 = 2\,p\,x,\ p = \frac{2\,e}{1 + e^2}. \tag{10}$$

Die Brennpunktspolare hat die Gleichung $x = -e.$ (11)

Die Entfernung eines Curvenpunktes $(x_,, y_,)$ von der Graden $x = -e$ ist:

$$r = \frac{x_, + e}{\sqrt{\{(1 + x_,^2 + y_,^2)\,(1 + e^2) - (x_, + e)^2\}}} = \frac{x_, + e}{1 + e\,x_,}. \tag{12}$$

Die Entfernung desselben Punktes vom Brennpunkt ist: $d = \frac{x_, + e}{1 + e\,x_,}$ (13)

also ist die Entfernung eines Curvenpunktes von der Directrix gleich dem Brennstrahl; wie auch schon aus (44) pag. 16 hervorgeht.

Die Gleichung der Tangente ist:

$$y\,y_, = p\,(x + x_,) \tag{14}$$

für $y = o$ wird $x = -x_,$.

Daher wird die Subtangente in dem Scheitel halbirt.

Die Tangenten an den Punkten $x_1\ y_1$ und $x_2\ y_2$ sind:

$$\left.\begin{aligned} 1)\ y\,y_1 &= p\,(x + x_1) \\ 2)\ y\,y_2 &= p\,(x + x_2) \end{aligned}\right\}. \tag{15}$$

Sollen beide aufeinander senkrecht stehen, so muss:

$$p^2\,(1 + x\,x_1) + y_1\,y_2 = o \text{ sein.} \tag{16}$$

Durch Subtraction von 1) und 2) (15) erhält man:

$$y\,(y_1 - y_2) = p\,(x_1 - x_2)$$

und da $y_1^2 - y_2^2 = (y_1 - y_2)\,(y_1 + y_2) = 2p\,(x_1 - x_2)$ ist,

$$2\,y = y_1 + y_2 \tag{17}$$

und hiersaus unter Berücksichtigung, dass $y_1^2 = 2\,p\,x_1,\ y_2^2 = 2\,p\,x_2$ ist:

$$2\,y^2 = p\,(x_1 + x_2) + y_1\,y_2. \tag{18}$$

Durch Addition von 1) und 2) (15) erhält man:

$$p\,(x_1 + x_2) = y\,(y_1 + y_2) - 2\,p\,x = 2\,(y^2 - p\,x)$$

und also aus (18): $y_1\,y_2 = 2\,p\,x.$ (19)

Durch Multiplication von 1) und 2) (15) ferner:

$$2\,x\,y^2 = p\,x^2 + 2\,x\,y^2 - 2\,p\,x^2 + p\,x_1\,x_2$$

$$x^2 = x_1\,x_2. \tag{20}$$

Werden die Werthe (19) und (20) in (16) eingesetzt, so geht die letztere Gleichung über in:

$$p^2\,(1 + x^2) + 2\,p\,x = o \tag{21}$$

und daraus folgt:

$$x = \frac{-1 + \sqrt{1 - p^2}}{p} = -e. \tag{22}$$

Der Ort der Durchschnitte der aufeinander senkrecht stehenden Tangenten ist also, wie in der Ebene, die Directrix.

3) Transformirt man ferner die Ellipsengleichung auf den Brennpunkt $(-c, o)$ mittelst der Formeln:

$$x = \frac{x, - c}{1 + c\,x,}, \quad y = \frac{y, \sqrt{1 + c^2}}{1 + c\,x,}, \tag{23}$$

so erhält man die Gleichung:

$$b^2\,x,^2\,(1 - a^2\,c^2) + a^2\,(1 + c^2)\,y,^2 - 2\,b^2\,c\,(1 + a^2)\,x, - b^2\,(a^2 - c^2) = o$$

und setzt man hier $a = \frac{1}{c}$ und wieder x und y statt $x,$ und $y,$, so geht diese Gleichung in die folgende über:

$$y^2 = 2\,\frac{1 - c^2}{c}\,x + \left(\frac{1 - c^2}{c}\right)^2, \tag{24}$$

welche Gleichung mit der Brennpunktsgleichung der ebenen Parabel genau übereinstimmt; und zwar ist für diesen Kegelschnitt die Entfernung des Scheitels vom Brennpunkt gleich dem Viertelparameter $= \frac{1 - c^2}{2\,c}$ und ergänzt $(2\,c)$ zu 90^0; zugleich ist er gleich dem halben Parameter des Kegelschnitts (5). Wir schreiben die Gleichung (24) wieder einfacher:

$$y^2 = 2\,p\,x + p^2. \tag{25}$$

Die Tangente am Curvenpunkte $(x,, y,)$ ist:

$$y\,y, = p\,(x + x,) + p^2 \tag{26}$$

die Senkrechte vom Brennpunkt (o, o) auf dieselbe:

$$y = -\frac{y,}{p}\,x. \tag{27}$$

Aus (26) und (27) erhält man:

$$x, = -\frac{x^2 + y^2 + p\,x}{x}, \quad y, = -\frac{p\,y}{x}. \tag{28}$$

Die Grössen $x,$ und $y,$ müssen aber der Gleichung $y,^2 = 2\,p\,x, + p^2$ genügen, oder es muss sein:

$$\left.\begin{aligned} \frac{p^2\,y^2}{x^2} &= -2\,p\,\frac{x^2 + y^2 + p\,x}{x}\,x\,p^2 \\ (x^2 + y^2)\,(p + 2\,x) &= o \\ x &= -\frac{p}{2}, \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

d. h. der Ort der Fusspunkte der Senkrechten auf die Tangenten ist wie bei der ebenen Parabel die Scheiteltangente; was wir auch schon aus (35) pag. 15 folgerten.

Die Tangente $y\,y, = p\,(x + x,) + p^2$ bildet mit der X axe den Winkel:

$$\cos\nu = \frac{y,}{\sqrt{y,^2 + p^2\,\{1 + [p + x,]^2\}}} \tag{30}$$

und mit dem Brennstrahl $y, x - x, y = o$ den Winkel:

$$\cos\nu, = \frac{p\,y, + x,\,y,}{\sqrt{\{y,^2 + p^2\,[1 + (p + x,)^2]\}\,\{x,^2 + y,^2\}}}. \tag{31}$$

Es ist aber: $(p + x,)^2 = x,^2 + 2\,p\,x, + p^2 = x,^2 + y,^2$ folglich sind (30) und (31) identisch:

$$\cos\nu = \cos\nu,. \tag{32}$$

Daher bilden die Tangenten mit der grossen Axe und dem Brennstrahl gleiche Winkel.

Der Durchschnittspunkt der Tangente mit der Xaxe ist:

$$\left.\begin{aligned} x &= -(p + x,) \\ \sqrt{x,^2 + y,^2} &= p + x, \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

und der Brennstrahl ist

also ist die Entfernung des Durchschnitts der Tangente mit der X axe vom Brennpunkt gleich dem Brennstrahl.

Die Polare des Brennpunktes ist:

$$x = -p. \tag{34}$$

Die Halbirungslinie der Brennstrahlen $\left.\begin{array}{l} y_1 x - x_1 y = o \\ y_2 x - x_2 y = o \end{array}\right\}$ (35)

ist

$$\frac{y_1 x - x_1 y}{p + x_1} = \frac{y_2 x - x_2 y}{p + x_2} \tag{36}$$

oder $$x \{ p (y_1 - y_2) + y_1 x_2 - x_1 y_2 \} = p (x_1 - x_2) y.$$

Der Pol der die Punkte $x_1 y_1$ und $x_2 y_2$ verbindenden Sehne ist aber:

$$\xi = - \frac{p (y - y_2) + y_1 x_2 - x_2 y_1}{y_1 - y_2}, \quad \eta = p \frac{x_1 - x_2}{y_1 - y_2} \tag{37}$$

und die Verbindungslinie des Brennpunktes mit (ξ, η) ist:

$$p (x_1 - x_2) x + [p (y_1 - y_2) + y_1 x_2 - x_1 y_2] y = o. \tag{38}$$

Die Graden (36) und (38) stehen senkrecht aufeinander; es ist deshalb (36) die äussere Halbirungslinie der Brennstrahlen. Derselbe trifft die Verbindungssehne von $x_1 y_1$ und $x_2 y_2$:

$$(y_1 - y_2) x - (x_1 - x_2) y = y_1 x_2 - x_1 y_2 \tag{39}$$

in einem Punkte, welcher in der Graden $x = -p$, also in der Directrix liegt.

Man hat daher wie in der Ebene den Satz, dass die Verbindungslinien des Durchschnitts der Polaren und der Directrix mit dem Brennpunkt die äussere Halbirungslinie des Winkels der Brennstrahlen ist.

§. 10. Der Kreis.

Für die Entfernung der Punkte (α', β') und (α, β) erhält man:

$$r^2 = \frac{(\alpha' - \alpha)^2 + (\alpha \beta' - \alpha' \beta)^2 + (\beta' - \beta)^2}{(1 + \alpha \alpha' + \beta \beta')} \tag{1}$$

setzt man α' und β' variabel bei constantem r und ordnet, so erhält man die Gleichung eines Kreises um den Punkt (α, β) mit dem Radius r:

$$\begin{aligned} &(1 + \beta^2 - \alpha^2 r^2) x^2 + (1 + \alpha^2 - \beta^2 r^2) y^2 - 2 \alpha \beta (1 + r^2) x y \\ &- 2 \alpha (1 + r^2) x - 2 \beta (1 + r^2) y + \alpha^2 + \beta^2 - r^2 = o. \end{aligned} \tag{2}$$

Stellt also die allgemeine Gleichung zweiten Grades:

$$a_{11} x^2 + 2 a_{12} x y + a_{22} y^2 + 2 a_{13} x + 2 a_{23} y + a_{33} = o$$

einen Kreis vor, so sind die Coordinaten seines elliptischen Centrums:

$$\alpha = \frac{a_{12}}{a_{23}}, \quad \beta = \frac{a_{12}}{a_{13}}$$

und der Radius ist:

$$r = \sqrt{\left[\frac{a_{12}}{a_{23}}\right]^2 + \left[\frac{a_{12}}{a_{13}}\right]^2 - a_{23}}. \tag{3}$$

Ist $a_{12} = o$, so muss auch entweder a_{13} oder $a_{23} = o$ sein; für $a_{13} = o$ sind die Centrumscoordinaten:

$$\alpha = o, \quad \beta = \frac{a_{11} - a_{22}}{a_{23}}$$

und für $a_{23} = o$,

$$\alpha = \frac{a_{22} - a_{11}}{a_{13}}, \quad \beta = o; \tag{4}$$

ist $a_{13} = a_{23} = o$, so ist der Coordinatenanfang zugleich Centrum, $\alpha = \beta = o$, $a_{11} = a_{22}$, $r^2 = -a_{33}$ und man hat die Centralgleichung:

$$x^2 + y^2 = r^2. \tag{5}$$

Die Bedingungsgleichung für das Senkrechtstehen conjugirter Durchmesser war:

$$a_{12}\,\alpha^2 + (a_{11} - a_{22})\,\alpha - a_{12} = o,$$

wobei a_{11}, a_{22}, a_{12} jezt die Constanten der Centralgleichung sind. Diese Gleichung ist aber bei dem Kreise unabhängig von α identisch erfüllt; man kann daher ebenso wie in der Ebene den Kreis definiren als diejenige Curve zweiten Grades, deren sämmtliche conjugirte Durchmesser rechtwinklig zu einander sind.

Da ferner allgemein bewiesen war, dass die Cardinalpunkte der elliptischen rechtwinkligen conjugirten Durchmesser die hyperbolischen Centra der Curve sind, so ist das auch für den Kreis gültig; d. h.

Jeder Punkt des Hauptkreises um das elliptische Centrum des Kreises ist ein hyperbolisches Centrum für ihn.

Zu demselben Resultat gelangt man auf folgendem Wege:

Zur Bestimmung der hyperbolischen Centra hat man die drei Bedingungen:

$$\left.\begin{aligned} \text{I.}\quad a &= \frac{a\,a_{11} + b\,a_{12} + a_{13}}{a\,a_{13} + b\,a_{23} + a_{33}} \\ \text{II.}\quad b &= \frac{a\,a_{12} + b\,a_{22} + a_{23}}{a\,a_{13} + b\,a_{23} + a_{33}} \\ \text{III.}\quad & a\,\alpha + b\,\beta + 1 = o, \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

welch letzte Bedingung aussagt, dass die gesuchten Centra in der Polaren des elliptischen Centrums $\alpha\,x + \beta\,y + 1 = o$ liegen müssen.

Führt man in (6) die Werthe der Constanten aus (2) ein, so erhält man

$$\left.\begin{aligned} 1.\quad a &= \frac{a(1+\beta^2-\alpha^2 r^2) - b\,\alpha\,\beta\,(1+r^2) - \alpha\,(1+r^2)}{-(a\,\alpha + b\,\beta)\,(1+r^2) + \alpha^2 + \beta^2 - r^2} \\ 2.\quad b &= \frac{b\,(1+\alpha^2-\beta^2 r^2) - a\,\alpha\,\beta\,(1+r^2) - \beta\,(1+r^2)}{-(a\,\alpha + b\,\beta)\,(1+r^2) + \alpha^2 + \beta^2 - r^2} \\ 3.\quad & a\,\alpha + b\,\beta + 1 = o. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Durch Substitution von 3. in 1. und 2. gehen letztere über in:

$$a = \frac{a\,(1+\alpha^2+\beta^2)}{1+\alpha^2+\beta^2},\quad b = \frac{b\,(1+\alpha^2+\beta^2)}{1+\alpha^2+\beta^2}. \tag{8}$$

Die Bedingungen also für $(a,\ b)$ als Centrum sind für alle Punkte der Graden $\alpha x + \beta y + 1 = o$ erfüllt. Man kann diese Eigenschaft des Kreises benutzen zu einer Bedingung, dass die allgemeine Gleichung zweiten Grades einen Kreis vorstellt.

Die Gleichung III (6) kann man schreiben:

$$a\,\frac{a_{12}}{a_{23}} + b\,\frac{a_{12}}{a_{13}} + 1 = o; \tag{9}$$

substituirt man diese in I und II, so erhält man als Bedingung, dass dieselben identisch erfüllt werden:

$$\left.\begin{aligned} \frac{a_{12}\,(a_{13}\,a_{22} - a_{12}\,a_{23})}{a_{13}\,(a_{12}\,a_{33} - a_{13}\,a_{23})} &= \frac{a_{12}\,(a_{11}\,a_{23} - a_{12}\,a_{13})}{a_{23}\,(a_{12}\,a_{33} - a_{13}\,a_{23})} \end{aligned}\right.$$

oder in einfacher Form:

$$\left.\begin{aligned} \frac{a_{13}}{a_{23}} &= \frac{a_{13}\,a_{22} - a_{12}\,a_{23}}{a_{11}\,a_{23} - a_{12}\,a_{13}} \\ a_{12}\,(a_{13}^2 - a_{23}^2) &= a_{13}\,a_{23}\,(a_{22} - a_{11}). \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Ist nun $a_{12} = o$, $a_{13} = o$, so hat man statt (9) die Substitution:

$$b\,\frac{a_{11} - a_{22}}{a_{23}} + 1 = o \tag{11}$$

und erhält für (10) die Bedingung:

$$a_{23}{}^2 = (a_{33} - a_{11})(a_{11} - a_{22}) \tag{12}$$

ist aber $a_{12} = o$, $a_{23} = o$, so hat man die Substitution:

$$a \frac{a_{22} - a_{11}}{a_{13}} + 1 = o \tag{13}$$

und als Bedingung:

$$a_{13}{}^2 = (a_{33} - a_{22})(a_{22} - a_{11}). \tag{14}$$

Für die Centralgleichung $x^2 + y^2 = r^2$ ist die Gleichung der Tangente und Polare für den Punkt $x, y,$:

$$\left.\begin{aligned} x\,x, + y\,y, &= r^2 \\ y, x - x, y &= o. \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

und der Radiusvector nach $x, y,$ ist:

Es folgt aus (15), dass Tangente und Radius im Berührungspunkt senkrecht stehen, und dass die Polare die Verbindungslinie des Pols mit dem Centrum senkrecht schneidet in einer Entfernung vom Centrum:

$$\varrho = \frac{r^2}{\sqrt{x,^2 + y,^2}}. \tag{16}$$

Der Umstand, dass Tangente und Radius im Berührungspunkt senkrecht sind, lässt uns leicht die Polare eines Punktes und die zugehörige Tangente construiren. Der geometrische Ort der Spitzen aller rechtwinkligen Dreiecke über derselben Basis ist aber auf der Kugel nicht ein Kreis. Sollen die Verbindungslinen $\left.\begin{matrix} x,, y, \\ -a, o \end{matrix}\right\}$ und $\left.\begin{matrix} x,, y, \\ +a, o \end{matrix}\right\}$ also:

$$\left.\begin{aligned} y,(x + a) &= y(x, + a) \\ y,(x - a) &= y(x, - a) \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

einen rechten Winkel bilden, so ist der Punkt $(x,, y,)$ bestimmt durch die Gleichung:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\frac{a^2}{1 - a^2}} = 1 \tag{18}$$

also eine Ellipse für $a < 1$,
durch die Grade $x = \pm a$ für $a = 1$
und eine Hyperbel für $a > 1$

und zwar liegt die grosse Axe der Ellipse in der Yaxe, die reelle Axe der Hyperbel dagegen in der Xaxe.

Transformirt man die Gleichung (18) auf das Centrum des Kreises $(+ a, o)$, so geht sie über in:

$$a(x^2 + y^2) + 2\frac{a^2}{1 - a^2}x = o \tag{19}$$

und hat mit dem auf dieselben Axen bezogenen Kreis die Durchschnittsabscisse:

$$x = -\frac{1 - a^2}{2a}r^2, \tag{20}$$

welche in der That der Gleichung der Polaren eines Punktes $\left(-\frac{2a}{1 - a^2}, o\right)$ genügt.

Man construirt also über der Verbindungslinie des Pols mit dem Centrum die Curve (18); die Durchschnittspunkte derselben mit dem Kreis sind die Berührungspunkte der beiden Tangenten.

Im §. 8 war bewiesen worden, dass die einer Hauptaxe parallelen Sehnen von der conjugirten Axe halbirt werden. Da nun im Kreise alle conjugirten Durchmesser rechtwinklig, also auch Axen sind, so wird die Kreissehne von dem auf ihr senkrechten Radius halbirt.

Natürlich gilt auch für den Kreis der im §. 6 allgemein bewiesene Satz von der harmonischen Theilung der Sekante durch die Polare eines ihrer Punkte, was man auf Grund des vorigen Satzes von der Halbirung der Sehnen durch den senkrechten Durchmesser leicht direkt beweisen könnte.

Transformirt man die Gleichung $x^2 + y^2 = r^2$ auf einen Cardinalpunkt der Xaxe oder Yaxe mittelst der Formeln (1) und (3) §. 8, so erhält man stess dieselbe Gleichung:

$$r^2 x^2 - y^2 = 1. \qquad (19)$$

Sie stellt eine Hyperbel vor, wie wir solche schon §. 8 (25) bis (28) kennen gelernt haben.

Die Brennpunktsabscisse derselben ist $x = \pm\infty$; die Brennstrahlen eines Punktes bilden eine Grade, welche der reellen Axe parallel ist, und das zwischen den beiden Hyperbelästen liegende Stück dieser Graden ist natürlich constant, gleich der reellen Axe.

Am Schlusse dieser Abhandlung erlaube ich mir, Herrn Privatdocenten Dr. Hess zu Marburg für die freundliche Unterstützung, welche er mir zu Theil werden liess, meinen Dank auszusprechen.

Der Verfasser.

Berichtigungen.

Seite 4 Zeile 7 und 8 von o. lies x, statt x_1
„ 5 „ 9 von o. lies x, statt x'
„ 9 „ 13 „ u. „ von $x,^2$ statt und $x,^2$
„ 10 „ 10 „ u. „ rechtwinklig statt rectwinklig.

Druck von Friedr. Scheel in Cassel.

Fig. 1.

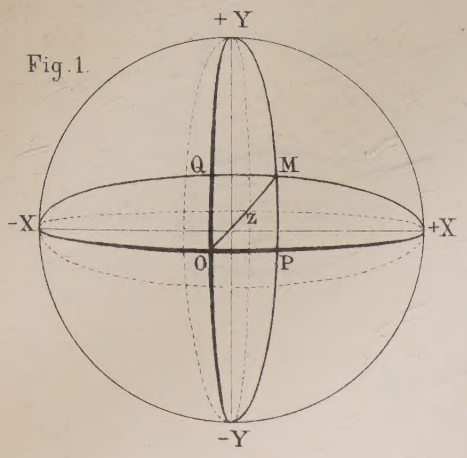


Fig. 3.

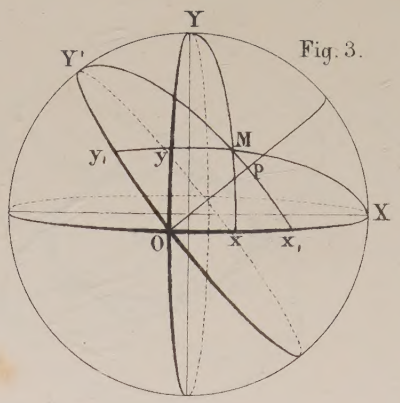


Fig. 2.

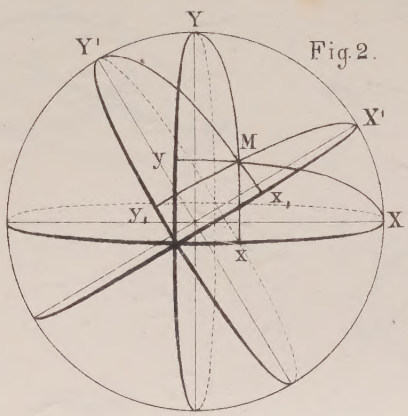


Fig. 5.

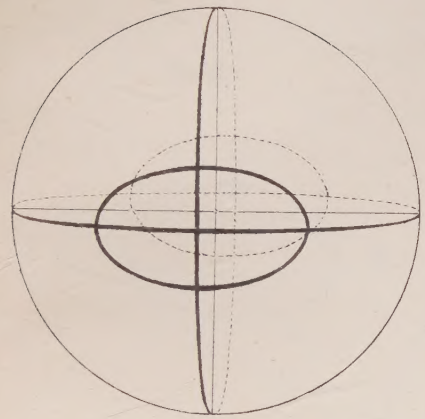


Fig. 6.

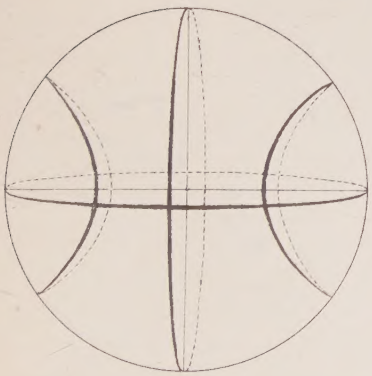
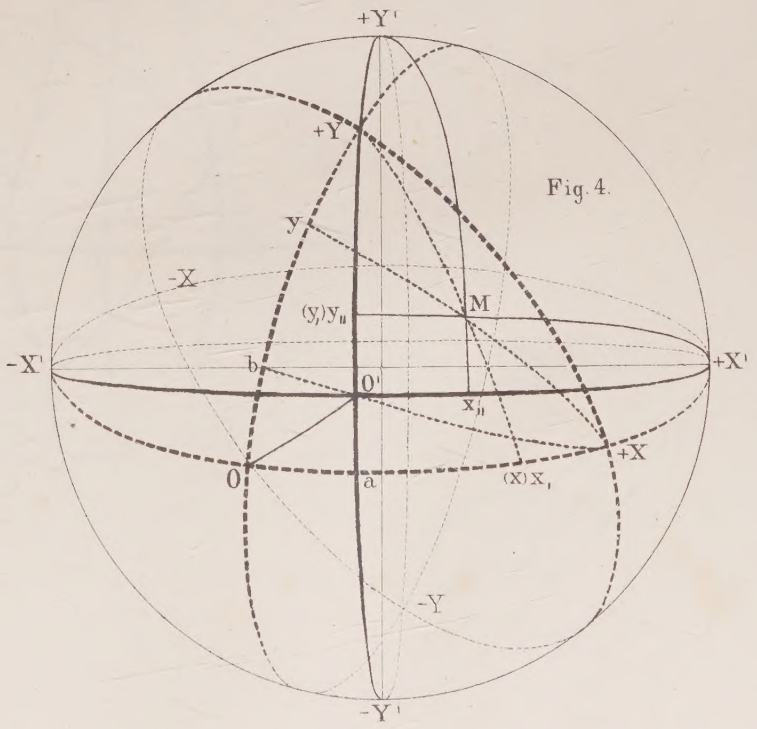


Fig. 4.



Conr. Müller, grüner Weg. Cassel.

Fig. 7.

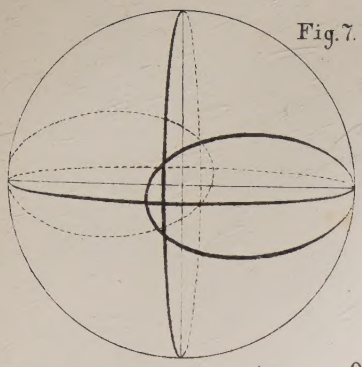


Fig. 9.

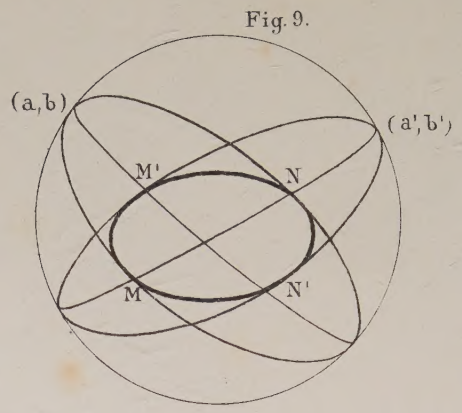


Fig 8.

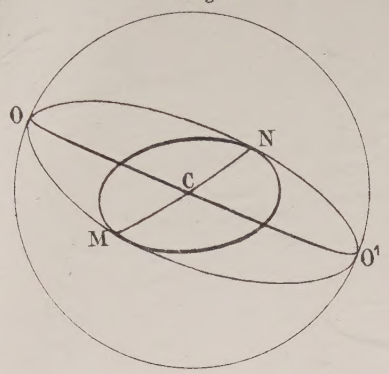
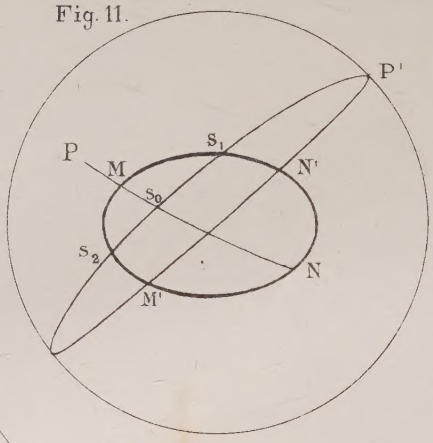


Fig. 11.



Y

Fig. 10.

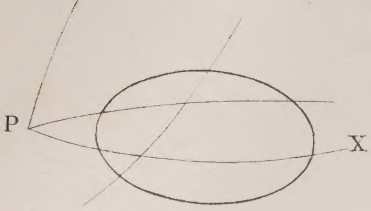


Fig. 14.

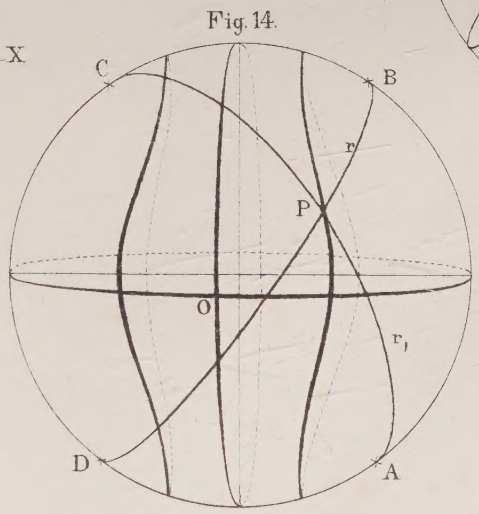


Fig. 12.

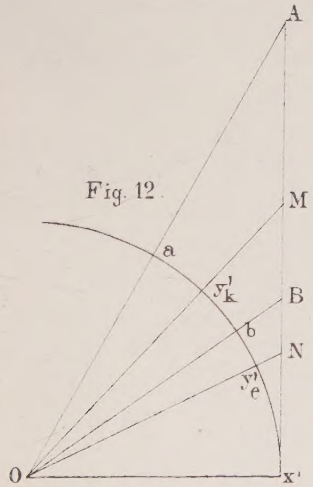


Fig 13.